LICENCIATURA EM

MATEMÁTICA

2^{a} edição

GEOMETRIA ANALÍTICA

FTC
FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

ead
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Geometria Analítica

MATERIAL DIDÁTICO

Produção Acadêmica

Jane Freire | Gerente de Ensino

Gessiara Carvalho | Coordenação de Curso

Ricardo Luiz Queiroz Freitas e Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento | Autor(a)

Ana Paula Amorim | Supervisão

Revisão de Texto

Carlos Magno Brito Almeida Santos
Márcio Magno Ribeiro de Melo

Produção Técnica

João Jacomel | Coordenação

Adriano Pedreira Cattai e Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento | Editoração

Equipe
André Pimenta, Antonio França Filho, Angélica de Fátima Jorge, Alexandre Ribeiro, Amanda Rodrigues, Bruno Benn, Cefas Gomes, Cláuder Frederico, Francisco França Júnior, Herminio Filho, Israel Dantas, Ives Araújo, John Casais, Márcio Serafim, Mariucha Silveira Ponte, Tatiana Coutinho e Ruberval da Fonseca
Imagens
Corbis/Image100/Imagemsource

www.ead.ftc.br

Sumário

Apresentação da Disciplina

Caro aluno,

A Geometria Analítica é um ramo da Matemática que estuda o lugar geométrico dos pontos do plano ou do espaço utilizando os princípios da Álgebra.

Os sistemas de coordenadas se constituem no princípio fundamental para o tratamento das equações que descrevem lugares geométricos. Comumente, o de coordenadas cartesianas é utilizado para estabelecer a relação entre as equações e os gráficos de uma reta, de um plano, ou de lugares geométricos notáveis como, por exemplo, a parábola ou o cilindro. Entretanto, utilizaremos outros sistemas de coordenadas que porventura venham a simplificar ou acrescentar o estudo desta relação.

"A geometria Analítica é o resultado de uma frutuosa ligação de dois ramos da Matemática: a Geometria: que trata de pontos, conjunto de pontos e propriedades a eles relativos; e a Análise: que estuda os números e as relações entre eles." (Marques, 1.991)

René Descartes criou, em 1.637, as alicerces da geometria analítica no livro intitulado GEOMETRIA. Este, e os seus princípios filosóficos, serviram de base para o estudo do Cálculo e que foi, mais tarde, introduzido independentemente por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz. Alguns pensam que o surgimento da geometria analítica constituiu o início da matemática moderna.

Este material foi elaborado para servir como referência aos estudos dos alunos do curso de Geometria Analítica da FTC-EaD.

No Bloco Temático 1, veremos, no Tema 1, As transformações de coordenadas e as cônicas. No Tema 2, trataremos do Sistema de Coordenadas Polares. Já no Bloco Temático 2, trataremos, no Tema 3, do estudo dos Vetores, da Retas e dos Planos. Por fim, no Tema 4, veremos o estudo das Superfícies.

Encontra-se disponível neste material, além dos exercícios resolvidos, questões propostas, ao final de cada seção. No final, uma atividade orientada foi elaborada para que seja resolvida individualmente e faça parte de sua de avaliação.

Este trabalho foi preparado com bastante entusiasmo. Cada exemplo, cada exercício, bem como a distribuição da teoria, foram cuidadosamente pensados com o objetivo de maximizar o seu aprendizado. Os erros são previsíveis. Portanto, para que possamos melhorar este material a sua contribuição será necessária.

Prof. *Ricardo Luiz Queiroz Freitas.*

Transformações, Cônicas e Coordenadas Polares

As Transformações e as Cônicas

Transformações de Coordenadas

Apresentação

A relação *equação algébrica versus representação gráfica* se constitui em um dos principais fatores estudados em geometria analítica. Sabemos, até aqui, quais equações determinam, em um sistema de coordenadas cartesianas, uma reta e uma circunferência. Entretanto, existem outras curvas importantes que necessitamos caracterizar. Estas curvas muitas vezes não possuem uma equação que as identifique facilmente e, por isso, precisamos de ferramentas (transformações) que as simplifique. As *transformações* são relações que quando utilizadas modificam outras relações, expressões ou figuras. Por exemplo, as transformações trigonométricas vistas no estudo de Trigonometria.

1.1 Definição. Duas equações são *equivalentes* se, e somente se, o conjunto de pontos que satisfazem a uma das equações, também satisfaz a outra. Por exemplo, as equações $(y-1)^2 = 2x$ e $y^2 - 2y - 2x + 1 = 0$ são equivalentes.

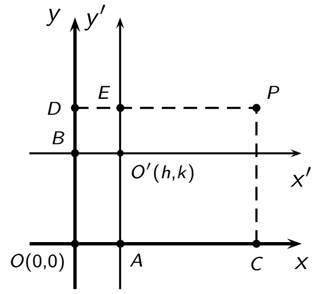
As transformações de coordenadas das seções 1.1 e 1.2 transformam uma equação em outra equivalente através de uma modificação na expressão da equação que a representa.

1.1 Translação de Eixos

Transladar um eixo é deslocá-lo ou movimentá-lo paralelamente à posição inicial. Observar-se-á que ao transladarmos os eixos coordenados de um plano cartesiano, com origem em O, estamos criando um novo sistema de coordenadas, com origem em O'. A fim de simplificar uma equação por translação de eixos, contaremos com o seguinte resultado:

1.2 Teorema. Se os eixos coordenados são transladados para uma nova origem $O'(h,k)$ e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano, antes e depois da translação de eixos são (x,y) e (x',y'), respectivamente, então as equações de translação de coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k. \end{cases} \qquad (1.1)$$



Prova: Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto $O'(h,k)$, arbitrário, e introduzamos um novo sistema $x'O'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema xOy sejam x e y e, em relação ao sistema $x'O'y'$, sejam x' e y'. Desta forma, e de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x &= \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = x' + h \\ y &= \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} = y' + k. \square \end{cases}$$

Estas equações de translação nos permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

Exemplo 1.1. Transforme a equação $y^3 - x^2 - 6y^2 - 2x + 12y = 9$ por uma translação de eixos coordenados à nova origem $(-1, 2)$.

Solução: Como a origem do sistema $x'O'y'$ é $(-1, 2)$, as equações de translação são

$$\begin{cases} x &= x' - 1 \\ y &= y' + 2 \end{cases}$$

Substituindo os valores de x e de y na equação, temos $(y'+2)^3 - (x'-1)^2 - 6(y'+2)^2 - 2(x'-1) + 12(y'+2) = 9$. Desenvolvendo-se os termos, $y'^3 + 6y'^2 + 12y' + 8 - x'^2 + 2x' - 1 - 6y'^2 - 24y' - 24 - 2x' + 2 + 12y' + 24 = 9$ e agrupando-os em ordem decrescente dos graus das variáveis, $y'^3 - x'^2 = 0$.

Exemplo 1.2. Transformar a equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ para um novo sistema de coordenadas com origem em $(-1, 3)$.

Solução: Neste caso, como as coordenadas da origem do sistema transladado foram dadas, temos então $h = -1$ e $k = 3$, e, as equações de translação são

$$\begin{cases} x &= x' - 1 \\ y &= y' + 3. \end{cases}$$

Substituindo as equações de translação, obtemos: $(x' - 1)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 1) - 6(y' + 3) + 6 = 0$. Desenvolvendo e agrupando os termos semelhantes, temos que $x'^2 + y'^2 = 4$.

Observe, nos exemplos anteriores, que a nova origem do sistema de coordenadas foi especificada. Porém, a translação é muito utilizada na obtenção de equações mais simples em que a nova origem não é, necessariamente, especificada. Vejamos, no exemplo seguinte, como encontrar essa nova origem.

Exemplo 1.3. Por uma translação de eixos coordenados transforme a equação $4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$ em outra desprovida dos termos de grau um.

Solução: Substituindo as equações de translação obtemos:

$$4(x' + h)^2 + (y' + k)^2 + 8(x' + h) - 6(y' + k) + 1 = 0.$$

Desenvolvendo e agrupando os termos semelhantes, temos que:

$$4x'^2 + y'^2 + (8h + 8)x' + (2k - 6)y' + 4h^2 + 8h + k^2 - 6k + 1 = 0.$$

Como devemos encontrar os valores de h e k que tornem a equação acima desprovida dos termos de grau um, então igualaremos a zero os coeficientes das variáveis x' e y'. Portanto,

$$\begin{cases} 8h + 8 = 0 \\ 2k - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = -1 \\ k = 3. \end{cases}$$

Substituindo-se os valores de h e de k encontrados em $4h^2 + 8h + k^2 - 6k + 1$ obtemos -12, o termo independente da equação transladada. Desta forma, a equação transladada fica $4x'^2 + y'^2 = 12$.

Exemplo 1.4. Por uma translação de eixos transforme a equação $y^2 + 6y = 8x - 17$ em outra mais simples possível.

Solução: Substituindo as equações de translação, obtemos: $(y' + k)^2 + 6(y' + k) = 8(x' + h) - 17$. Desenvolvendo e agrupando os termos semelhantes desta última equação, temos que: $y'^2 + (2k + 6)y' - 8x' + k^2 + 6k - 8h + 17 = 0$. Como devemos encontrar os valores de h e k que tornem a equação acima o mais simples possível, e os únicos termos que aparecem nesta equação com as incógnitas h e k são os coeficiente de y' e o termo independente, então os igualaremos a zero para transformar a equação dada em uma outra com quantidade de termos menor. Portanto,

$$\begin{cases} 2k + 6 = 0 \\ k^2 + 6k - 8h + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ h = 1 \end{cases}$$

Desta forma, a equação transladada fica $y'^2 - 8x' = 0$.

Trabalharemos, logo, com equações de grau dois e, por ser de fácil aplicação, utilizaremos o método do complemento de quadrados para encontrar a equação da cônica com os eixos transladados para uma nova origem conveniente.

1.1.1 Método do Complemento de Quadrado

O *complemento de quadrado* consiste em obter, a partir do binômio $x^2 + bx$, o trinômio quadrado perfeito $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ ao se adicionar o termo $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ao binômio. De fato,

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Observe que este método é empregado em um binômio $ax^2 + bx$, onde $a = 1$. Se $a \neq 1$ devemos isolar o coeficiente a antes de utilizar o método.

Exemplo 1.5. Transforme a expressão $4x^2 + 2x$ em um trinômio quadrado perfeito.

Solução: Como o coeficiente do termo de grau 2 é diferente de 1, escrevamos $4\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)$. Assim, $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ e a expressão $4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$.

Podemos, ao adicionar ou multiplicar ambos os membros de uma equação por um número real e não nulo, transformá-la em outra equação equivalente. Assim, dada uma equação, com uma ou mais variáveis de grau dois, a transformação de um binômio em um trinômio quadrado perfeito pode ser utilizada para determinar uma outra equação equivalente e mais simples que a original, sem termos necessariamente que utilizar as equações de transformação de coordenadas. Este processo de transformação de uma equação em outra equivalente chamaremos de *método do complemento de quadrado*.

Exemplo 1.6. Por complemento de quadrados, transforme a equação $x^2 - 2y^2 + 4x + 24y - 69 = 0$ em outra equivalente e mais simples.

Solução: Agrupemos os termos semelhantes e os arrumemos de modo a transformar os binômios da equação dada em trinômios quadrados perfeitos, ou seja, $(x^2 + 4x) - 2(y^2 - 12y) = 69$. Transformemos esta em outra equação equivalente de modo que os binômios $(x^2 + 4x)$ e $(y^2 - 12y)$ sejam transformados em trinômios quadrados perfeitos. Desta forma, ao somarmos os números 4 ao binômio $(x^2 + 4x)$ e 36 ao binômio $(y^2 - 12y)$ devemos somar 4 e -72 ao segundo membro já que queremos uma equação equivalente, ou seja, $(x^2 + 4x + 4) - 2(y^2 - 12y + 36) = 69 + 4 - 72$. Segue que, $(x + 2)^2 - 2(y - 6)^2 = 1$. Se fizermos $x + 2 = x'$ e $y - 6 = y'$, podemos escrever: $x'^2 - 2y'^2 = 1$.

1.1.2 Exercícios Propostos

EP 1.1. Complete os quadrados das seguintes expressões:

(a) $y^2 + 8y - x^2 - 2x = -11$; (b) $4y^2 + 18y + 9x^2 - 24x = -9$; (c) $-3x^2 - y^2 + 3x + 4y = 5$.

EP 1.2. Por meio de uma translação dos eixos coordenados, transforme as equações dadas para a nova origem indicada.

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$, $O'(-1; 3)$;

(b) $xy - 3x + 4y - 13 = 0$, $O'(-4; 3)$;

(c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$, $O'(1; 1)$;

(d) $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0$, $O'(3; 2)$;

(e) $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y = 5$, $O'(1; 2)$.

EP 1.3. Usando uma translação de eixos coordenados,

(a) simplifique a equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ indicando qual a nova origem e quais são as equações de transformação;

(b) utilizando a translação do ítem anterior, determine as coordenadas do ponto $P(1; -2)$ em relação ao sistema $x'O'y'$ e as coordenadas de $Q_{x'y'}(2; 1)$ no sistema xOy.

EP 1.4. Usando uma translação de eixos coordenados,

(a) simplifique a equação $y^2 - x^2 - 8y + 2x - 4 = 0$ indicando qual a nova origem e quais são as equações de transformação;

(b) utilizando a translação do ítem anterior, determine as coordenadas do ponto $P(-2, 3)$ em relação ao sistema $x'O'y'$ e às coordenadas de $Q_{x'y'}(1; 2)$ no sistema xOy.

EP 1.5. Determine a translação dos eixos coordenados (nova origem e equações de transformação) que reduzem à forma canônica a equação dos círculos:

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$; (b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$; (c) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 16 = 0$.

EP 1.6. Converta os pontos, como se pede, usando a translação indicada pela nova origem O'.

(a) $P(2; 3)$ xy para $x'y'$, com $O'(-1; 5)$;

(b) $Q(4; -2)$ $x'y'$ para xy, com $O'(2; -3)$;

(c) $R(1; 0)$ xy para $x'y'$, com $O'(0; 4)$;

(d) $S(0; -4)$ $x'y'$ para xy, com $O'(-2; 0)$.

EP 1.7. Por uma translação dos eixos coordenados, transforme a equação dada em outra desprovida de termos do 1° grau, se possível.

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$; (b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$; (c) $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$;

(d) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$; (e) $x^2 - 4y^2 - 4x - 24y - 36 = 0$.

1.2 Rotação de Eixos

Rotacionar um eixo consiste em girarmos o eixo tomando como base para esse deslocamento radial um ponto fixo. O sentido anti-horário da rotação é convencionado como o positivo.

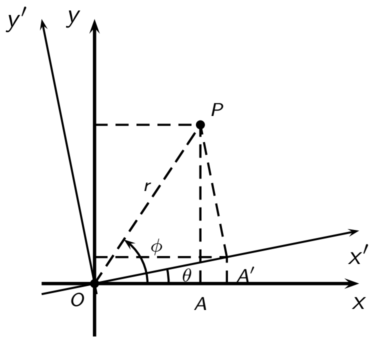
Ao se rotacionar os eixos coordenados xOy, fixando-se a origem O, estamos criando um novo sistema de coordenadas $x'Oy'$, com origem em O. A fim de simplificar uma equação por rotação de eixos contaremos com o seguinte resultado:

1.3 Teorema. Se girarmos os eixos coordenados de um ângulo θ, fixando-se a origem O, e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da rotação de eixos são (x, y) e (x', y'), respectivamente, então as equações de rotação são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' \cos(\theta) - y' \operatorname{sen}(\theta) \\ y = x' \operatorname{sen}(\theta) + y' \cos(\theta). \end{cases} \tag{1.2}$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$



Prova: Consideremos o plano Oxy e seja θ o ângulo de rotação o qual é obtido um novo sistema $O'x'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida de Ox e Oy. Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema Oxy são x e y e, em relação ao sistema $O'x'y'$ são x' e y'. Desta forma, e de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x' = \overline{OA'} = r\cos(\phi) \\ y' = \overline{A'P} = r\operatorname{sen}(\phi) \end{cases} \tag{1.3}$$ e $$\begin{cases} x = \overline{OA} = r\cos(\theta+\phi) = r\cos(\theta)\cos(\phi) - r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) \\ y = \overline{AP} = r\operatorname{sen}(\theta+\phi) = r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) + r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) \end{cases} \tag{1.4}$$

Portanto, substituindo-se (1.3) em (1.4), temos:

$$\begin{cases} x = x' \cos(\theta) - y' \operatorname{sen}(\theta) \\ y = x' \operatorname{sen}(\theta) + y' \cos(\theta). \square \end{cases}$$

Exemplo 1.7. Determinar as novas coordenadas do ponto $(3; -4)$ quando os eixos coordenados são girados de $45°$.

Solução: Pelo teorema acima, as equações de transformação são

$$\begin{aligned} 3 &= x' \cos(45°) - y' \operatorname{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ -4 &= x' \operatorname{sen}(45°) + y' \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $y' = -\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Exemplo 1.8. Por meio de uma rotação de $30°$ dos eixos coordenados, transforme a equação

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4.$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30°) & -\operatorname{sen}(30°) \\ \operatorname{sen}(30°) & \cos(30°) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

Substituindo-se na equação da curva:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4.$$

Simplificando-a, encontramos:

$$\frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 4.$$

Exemplo 1.9. Por meio de uma rotação dos eixos coordenados, transforme a equação $(3x-4y)^2-10(4x-3y)=0$ em outra equação desprovida do termo em $x'y'$.

Solução: $(3x-4y)^2-10(4x-3y)=0 \Leftrightarrow 9x^2-24xy+16y^2-40x-30y=0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} -24xy &= -24[x'\cos(\theta)-y'\operatorname{sen}(\theta)][x'\operatorname{sen}(\theta)+y'\cos(\theta)] \\ &= -24[x'^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)+x'y'\cos^2(\theta)-x'y'\operatorname{sen}^2(\theta)-y'^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)] \\ &= -24\{(x'^2-y'^2)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)+x'y'[\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)]\} \end{aligned}$$

Como queremos uma equação desprovida do termo $x'y'$, devemos encontrar o valor de θ tal que seu coeficiente seja nulo.

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)=[\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)][\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)]=0 &\Leftrightarrow \cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)=0 \text{ ou } \cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)=0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta)=\operatorname{sen}(\theta) \text{ ou } \cos(\theta)=-\operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Segue que $\theta=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

1.2.1 A Equação Geral de Grau Dois

O teorema a seguir nos apresenta uma forma de obter, a partir de uma equação geral de grau dois, o ângulo de rotação dos eixos coordenados de modo a obter uma equação desprovida do termo xy, dado no sistema a priori.

1.4 Definição. A equação geral do segundo grau a duas variáveis x e y é dada por

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \tag{1.5}$$

1.5 Teorema. A equação (1.5) pode ser sempre transformada na equação

$$a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0, \tag{1.6}$$

onde a inexistência do termo de segundo grau $x'y'$ se deve as equações de rotação dos eixos coordenados por um ângulo agudo θ, positivo, tal que

$$\operatorname{tg}(2\theta)=\frac{b}{a-c}, \text{ se } a\neq c, \text{ e } \theta=\frac{\pi}{4}, \quad \text{se} \quad a=c.$$

Prova: Das equações de rotação $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x'\cos(\theta)-y'\operatorname{sen}(\theta) \\ y &=& x'\operatorname{sen}(\theta)+y'\cos(\theta), \end{array}\right.$ temos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& x'^2\cos^2\theta-2x'y'\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+y'^2\operatorname{sen}^2\theta \\ x\cdot y &=& x'^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)+x'y'\cos^2\theta-x'y'\operatorname{sen}^2\theta-y'^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) \\ y^2 &=& x'^2\operatorname{sen}^2\theta+2x'y'\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+y'^2\cos^2\theta, \end{array}\right.$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& x'^2\cos^2\theta-\operatorname{sen}(2\theta)x'y'+y'^2\operatorname{sen}^2\theta \\ x\cdot y &=& (x'^2-y'^2)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)+\cos(2\theta)x'y' \\ y^2 &=& x'^2\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}(2\theta)x'y'+y'^2\cos^2\theta, \end{array}\right.$$

Multiplicando-se, respectivamente, estas três últimas equações pelas constantes a, b e c, e as somando, teremos $(-a+c)\operatorname{sen}(2\theta)+b\cos(2\theta)$. como coeficiente do termo $x'y'$. Finalmente, como queremos a inexistência deste termo, igualamos a zero o coeficiente obtido, obtendo

$$\operatorname{tg}(2\theta)=\frac{b}{a-c}, \text{ se } a\neq c, \text{ e } \theta=\frac{\pi}{4}, \quad \text{se} \quad a=c.\square$$

Exemplo 1.10. Descubra qual o ângulo de rotação que transforma cada equação a seguir em outra desprovida do termo misto de grau dois.

(a) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$; (b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16 = 0$; (c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$.

Solução:

(a) $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = 1$ e $f = -4$, e como $a \neq c$, pelo Teorema 1.5, $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{3}$. Logo $\theta = 30°$.

(b) $a = c = 3$. Logo $\theta = 45°$.

(c) $a = 9$, $b = -24$, $c = 16$, $d = -40$, $e = -30$ e $f = 0$. Portanto, $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{-24}{9-16} = \dfrac{24}{7}$. Neste caso, é impossível exibir um ângulo θ sem auxílio de uma calculadora ou uma tábua trigonométrica. No entanto, pelas relações métricas num triângulo retângulo, temos $\operatorname{sen}(2\theta) = \dfrac{24}{25}$ e $\cos(2\theta) = \dfrac{7}{25}$. De acordo com as identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$ e $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$, encontramos $\operatorname{sen}(\theta) = \pm\dfrac{3}{5}$ e $\cos(\theta) = \pm\dfrac{4}{5}$. Considerando $0 < \theta < 90°$, o ângulo de rotação é $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

Exemplo 1.11. Através de uma rotação dos eixos, transforme a equação $5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+29 = 0$ em outra desprovida do termo misto de grau dois.

Solução: Sabemos que $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{b}{a-c} = \dfrac{4}{3}$, $\cos(2\theta) = \dfrac{1}{\sec(2\theta)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\theta)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{3}^2}} = \dfrac{5}{3}$.

Assim, $\cos(\theta) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{3}{5}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{3}{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Logo, as equações de rotação são:

$$x = x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta) = (2x' - y')\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad y = x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) = (x' + 2y')\frac{1}{\sqrt{5}}$$

substituindo-se na equação obtemos a equação geral: $6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 29 = 0$.

1.2.2 Exercícios Propostos

EP 1.8. Por uma rotação dos eixos, seguida do ângulo indicado, transforme cada uma das equações.

(a) $xy^2 - 18 = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$rad; (b) $2x + 5y = 3$, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{2}\right)$;

EP 1.9. Por uma rotação dos eixos coordenados, transforme cada uma das equações dadas em outra desprovida do termo indicado.

(a) $x^2 - 2xy + y^2 = 4$, $x'y'$; (b) $x + 2y = 2$, y';

EP 1.10. Reduza a equação à forma mais simples através de translação eventual e rotação.

(a) $4x^2 + y^2 + 8x - 10y + 13 = 0$

(b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

(c) $4x^2 - 5y^2 + 12x + 40y + 29 = 0$

(d) $13x^2 + 6xy + 21y^2 + 34x - 114y + 73 = 0$

(e) $x^2 - 6x - 5y + 14 = 0$

(f) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x = 14\sqrt{13}y - 117$

(g) $4x^2 - 3y^2 + 24x - 12y + 17 = 0$

(h) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 20x - 10y - 5 = 0$

(i) $12x^2 + 8xy - 3y^2 + 64x + 30y = 0$

(j) $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y + 14 = 0$

(k) $y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

(l) $2x^2 - 12xy + 7y^2 - 4x - 8y + 14 = 0$

(m) $7x^2 + 6xy - y^2 - 2x - 10y - 9 = 0$

(n) $25x^2 + 20xy + 4y^2 + 30x + 12y - 20 = 0$

Cônicas

1.3 Introdução

Considere e e g duas retas concorrentes, não perpendiculares, cuja intersecção é um ponto O. Mantenha fixa uma das retas, por exemplo e (eixo), e façamos girar $360°$ em torno desta, mediante um ângulo constante, a outra reta g (geratriz). O objeto gerado é chamado de *superfície cônica formada por duas folhas* ou, simplesmente, *superfície cônica*, e separadas pelo vértice O. O conjunto de pontos obtidos pela intersecção de um plano π com a superfície cônica é chamada de *seção cônica*, ou simplesmente *cônica*. Ao seccionarmos uma superfície cônica por um plano arbitrário π, que não contém o vértice O, obteremos uma cônica dita *não degenerada*, e, à medida que variamos a posição do plano de corte π, obtemos a:

- Parábola: o plano π é paralelo a uma geratriz da superfície cônica.
- Elipse: o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície cônica;
- Hipérbole: o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície cônica.

Seja π_0 o plano de corte que contém o vértice O da superfície. A cônica se degenerará em: um ponto, se o plano π_0 intercepta somente o vértice; uma reta, se o plano π_0 contém somente uma geratriz; duas retas, se o plano π_0 contém o eixo e.

As cônicas possuem equações, chamadas reduzidas ou canônicas, que se tornam mais úteis, visto que, através destas, podemos determinar certos elementos que as melhor caracterizam-nas. Entretanto, para chegarmos a estas equações definiremos, de outra maneira, cada cônica e seus elementos.

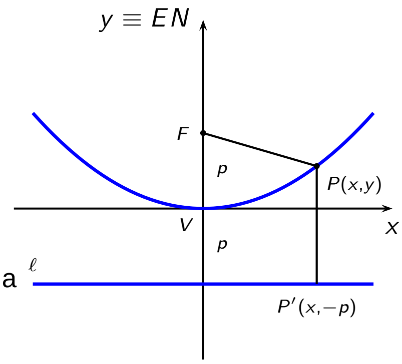
1.4 A Parábola

1.6 Definição. Considere um plano π determinado por uma reta ℓ e um ponto F não pertencente a esta reta. A parábola é o conjunto de todos os pontos do plano π que eqüidistam de F e de ℓ.

Segue da definição que dado um ponto fixo F e uma reta ℓ, um ponto P do plano está eqüidistante destes se, e somente se, pertence a uma parábola, ou seja,

$$d(P,F) = d(P,\ell) \Leftrightarrow P \in \text{ Parábola.} \tag{1.7}$$

1.4.1 Os Principais Elementos da Parábola



Como elementos da parábola temos:

† O foco F: ponto fixo da parábola;

† A diretriz ℓ: reta fixa da parábola;

† O eixo focal EF: reta que passa pelo foco F e é perpendicular a diretriz ℓ;

† O vértice V: é o ponto de intersecção da parábola com seu eixo. Situado entre a diretriz e o foco exatamente no meio;

† A corda: é obtida ligando quaisquer dois pontos distintos da parábola, por exemplo $\overline{AC}$;

† A corda focal: uma corda que passa pelo foco;

† O *lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal;

† O raio focal: é o segmento de reta de extremos no foco e num ponto da parábola.

Observe que devemos considerar o fato de que $F \notin \ell$, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta. Outro fato é que denominamos o número p de *parâmetro da parábola*.

1.4.2 As Equações Padrões de uma Parábola

Dizemos que uma equação é *padrão*, também denominada *canônica* ou *reduzida*, quando a utilizamos para descrever um conjunto de curvas com alguma característica em comum. A parábola possui quatro tipos de equação padrão, onde a determinação de somente uma delas será demonstrada, pois as outras são obtidas de forma semelhante.

A Equação Padrão da Parábola com o Vértice na Origem e Eixo de Simetria sobre um dos Eixos Coordenados

Sejam $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de vértice V na origem dos eixos coordenados e de foco $F(0, p)$. Observe que qualquer ponto da diretriz ℓ é dado por $P'(x, -p)$. Pela definição de parábola

$$d(P, F) = d(P, \ell),$$

temos, de acordo com a figura anterior, que:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(p + y)^2}.$$

Desenvolvendo a igualdade acima, obtemos

$$x^2 = 4py,$$

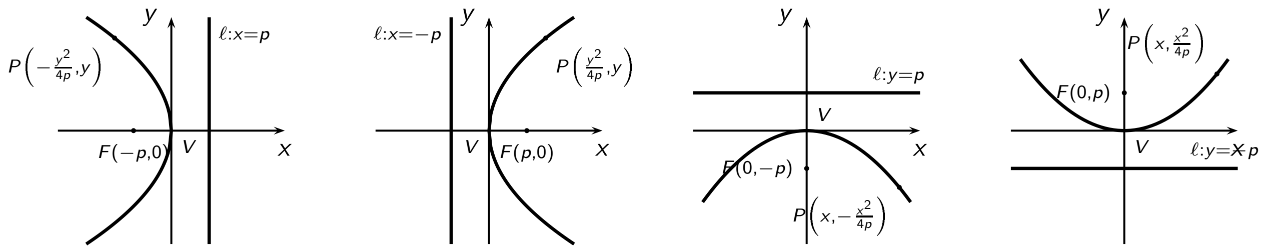
a equação reduzida da parábola para este caso.

De forma análoga, podemos obter as equações reduzidas das parábolas com vértice em $(0, 0)$ para os demais casos, onde os focos estão sobre os semi-eixos ainda não analisados. Portanto,

$$\boxed{x^2 = \pm 4py} \quad \text{ou} \quad \boxed{y^2 = \pm 4px}. \tag{1.8}$$

Da análise das equações em 1.8, tendo em vista ser x^2 (y^2) sempre positivo ou nulo e que $p > 0$, podemos concluir que: se a parábola tem concavidade voltada para cima (direita), o sinal no 2° membro é positivo, caso contrário, tem concavidade voltada para baixo (esquerda), se o sinal no 2° membro é negativo.

A tabela a seguir apresenta um resumo das principais características da parábola quando o eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados.



$y^2 = -4px$ $\quad$ $y^2 = 4px$ $\quad$ $x^2 = -4py$ $\quad$ $x^2 = 4py$

Exemplo 1.12. Obter a equação da parábola que satisfaça as condições em cada caso.

(a) Vértice na origem e foco em $(0, 1)$;

(b) Foco em $(0, -3)$ e diretriz $y = 3$;

(c) Vértice na origem, concavidade voltada para cima e passando pelo ponto $P(-2, 5)$.

Solução: (a) $V(0, 0)$ e $F(0, 1)$. Logo, $p = 1$ e de $x^2 = 4py$, obtemos: $x^2 = 4y$. (b) $F(0, -3)$ e $\ell : y = 3$. Portanto, $V(0, 0)$ e $p = 3$. A equação é $x^2 = -4py \therefore x^2 = -12y$. (c) $V(0, 0)$ e equação da forma $x^2 = 4py$. Como $(-2, 5)$ é ponto da parábola, temos $(-2)^2 = 4p5 \therefore p = \dfrac{1}{5}$. Portanto, a equação é $x{=}\dfrac{4}{5}y$.

Exemplo 1.13. Determinar, para cada uma das parábolas, o foco e uma equação da diretriz.

(a) $x^2 - 16y = 0$ $\qquad$ (b) $x = -\dfrac{1}{4}y^2$

Solução: (a) $x^2 = 16y \therefore p = 4$. Portanto, $F(0, 4)$ e $\ell : y = -4$. (b) $x = -\dfrac{1}{4}y^2 \therefore y^2 = -4x$. Donde $p = 1$. Logo, o foco é $F(-1, 0)$ e $\ell : x = 1$.

Exemplo 1.14. Determinar o comprimento do latus rectum de uma parábola.

Solução: Consideremos as equações $x^2 = 4py$ e $y = p$, respectivamente, a da parábola de vértice na origem e eixo focal coincidindo com o eixo das ordenadas, e a da reta perpendicular ao eixo dos y passando por $(0, p)$. Observe que a interseção dos gráficos da parábola e da reta são as extremidades L e R do latus rectum da parábola. Resolvendo-se o sistema encontraremos $x = \pm 2p$ e $y = p$. Logo, $|LR| = 4p$.

A Equação Padrão da Parábola com o Vértice Fora da Origem e Eixo de Simetria Paralelo a um dos Eixos Coordenados

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da parábola com vértice $V(h, k)$ fora da origem do sistema xOy e cujo eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados. Para isso basta transladarmos o sistema xOy para uma nova origem coincidindo com o vértice V, obtendo-se um novo sistema $x'O'y'$. Assim, as equações destas parábolas se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{x'^2 = \pm 4py'} \quad \text{ou} \quad \boxed{y'^2 = \pm 4px'}.$$

Porém, pelas equações de translação (1.1), temos que

$$\begin{cases} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)} \quad \text{ou} \quad \boxed{(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)}. \qquad (1.9)$$

Exemplo 1.15. Determine a equação reduzida da parábola de vértice $V(3,2)$, eixo focal paralelo ao eixo das abscissas e parâmetro $p = 1$.

Solução: Pelo enunciado da questão podemos concluir que a equação reduzida é $y'^2 = \pm 4px'$. Como $p = 1$ e $V(3,2)$, ou seja, $x' = x - 3$ e $y' = y - 2$, temos $(y-2)^2 = \pm 4(x-3)$.

Exemplo 1.16. Dada a equação $x^2 + 6x - 8y + 17 = 0$, determine sua equação reduzida, o vértice, o foco e uma equação da sua diretriz e do eixo focal.

Solução: Completando-se o quadrado da variável x na equação dada, temos: $(x+3)^2 = 8(y-1)$. Portanto, o vértice é $V(-3,1)$, o foco é $F(-3,3)$, a equação da diretriz é $\ell : y = -1$ e o eixo focal $x = -3$.

Quando o eixo de simetria da parábola não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados, a equação é "mais complicada", mas também se enquadra na forma geral da equação do 2° grau a duas incógnitas

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

e, por uma rotação dos eixos coordenados, podemos reduzi-la a

$$a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0;$$

que facilmente é identificada se utilizarmos os critérios do primeiro item do Teorema 1.12.

Excentricidade da Parábola

Chamamos de *excentricidade* (e) da parábola a razão entre as distâncias de um ponto arbitrário P da curva ao foco e de P à diretriz. Neste caso, teremos sempre $e = 1$.

1.4.3 Exercícios Propostos

EP 1.11. Em cada item, determine a equação da parábola a partir dos elementos dados:

(a) Foco $F(3,4)$ e diretriz $\ell : x - 1 = 0$;

(b) Foco $F(-1,1)$ e vértice $V(0,0)$;

(c) Vértice $V(1,2)$, eixo focal paralelo a Ox e $P(-1,6)$ é ponto do seu gráfico;

(d) Eixo focal paralelo a Oy e cujo gráfico passa pelos pontos $(0,0), (1,-3)$ e $(-4,-8)$;

(e) Vértice $V(1,1)$ e foco $F(0,2)$;

(f) Eixo focal $EF : y - 5 = 0$, diretriz $\ell : x - 3 = 0$ e vértice sobre a reta $r : y = 2x + 3$;

(g) Eixo focal sobre o eixo Oy e o ponto $L(2,2)$ como sendo uma das extremidades do latus rectum.

EP 1.12. Identifique o lugar geométrico de um ponto que se desloca de modo que a sua distância ao ponto $P(-2;3)$ é igual à sua distância à reta $r : x + 6 = 0$. Em seguida, a equação desse lugar geométrico.

EP 1.13. Determine o comprimento da corda focal da parábola $x^2 = -8y$ que é paralela à reta $r : 3x + 4y = 7$.

EP 1.14. Determine a equação da parábola de vértice $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e diretriz $y = x$.

EP 1.15. Determine a equação geral da parábola de diretriz $y = 3$, eixo focal $x = -4$ e cujo foco se encontra sobre a reta $r : y = -x - 5$.

EP 1.16. Determine uma equação da parábola que passa pelo ponto $P(11, 6)$, eixo focal coincide com Ox, possui foco no ponto $F(3, 0)$ e não intercepta o eixo Oy.

EP 1.17. Determine a equação geral da parábola de vértice $V(2, 1)$, eixo focal paralelo a Oy e um de seus pontos com coordenadas $(0, 3)$.

EP 1.18. Determine uma equação da parábola de vértice em $V(0, 0)$ e diretriz $y = x - 4$.

EP 1.19. Determine o que se pede, dadas as equações das parábolas:

$$(I) 4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0 \tag{1.10}$$

$$(II) y^2 - 2xy + x^2 + 16x + 16y = 0. \tag{1.11}$$

(a) As coordenadas do vértice e do foco;

(b) As equações da diretriz e do eixo focal;

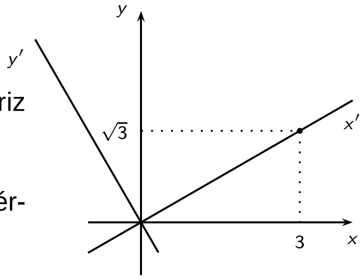
(c) O comprimento do latus rectum.

EP 1.20. Uma parábola tem por equação $y'^2 = -8x'$ se em relação ao sistema $x'Oy'$ indicado na figura.

(a) Esboce o gráfico desta cônica;

(b) Determine as coordenadas do foco e a equação da diretriz em relação ao sistema $x'Oy'$.

(c) Determine a equação da cônica e as coordenadas do vértice em relação ao sistema xOy.



1.5 A Elipse

1.7 Definição. Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante e maior que a distância entre esses pontos fixos.

Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π, um ponto P deste plano pertence a elipse E se, e somente se,

$$E = \{P \in \pi; d(P, F_1) + d(P, F_2) = K, K > d(F_1, F_2)\}. \tag{1.12}$$

1.5.1 Os Principais Elementos da Elipse

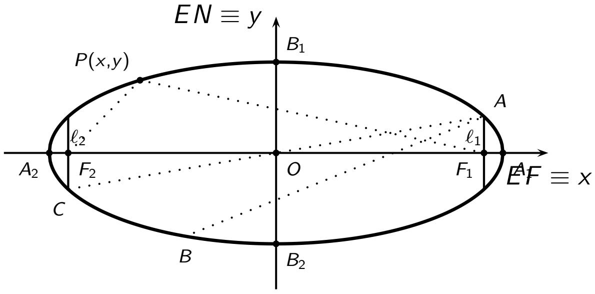
Como elementos de uma elipse temos:

† Os focos F_1 e F_2: os pontos fixos;

† O eixo focal EF: reta que passa pelos focos;

† O centro O: Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;

† O eixo normal EN: Reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;



† Os vértices A_1 e A_2: pontos de intersecção da elipse com o eixo focal;

† Os vértices B_1 e B_2: pontos de intersecção da elipse com o eixo normal;

† Eixo maior EM: segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);

† Eixo menor Em: segmento de reta que une os vértices B_1 e B_2 ($\overline{B_1B_2}$);

† A corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da elipse, por exemplo $\overline{AC}$;

† A corda focal: uma corda que passa pelo foco;

† O *lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (ℓ_1 e ℓ_2);

† O raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da elipse.

1.8 Teorema. Seja E uma elipse cujo comprimento do eixo maior $\overline{A_1A_2}$, do eixo menor $\overline{B_1B_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$, $2b$ e $2c$. Então

$$\begin{cases} |\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}, P \in E.$$

Prova: Mostremos inicialmente que $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$. De fato, pela definição de elipse temos:

$$K = |\overline{A_1F_1}| + |\overline{A_1F_2}| = (a-c) + (a+c) = 2a.$$

Uma vez que $|\overline{B_1F_1}| + |\overline{B_1F_2}| = 2a$ e $|\overline{B_1F_1}| = |\overline{B_1F_2}|$ temos, $|\overline{B_1F_1}| = a$. □

1.5.2 As Equações Padrões de uma Elipse

Sejam $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse de centro na origem dos eixos coordenados e cujo eixo focal coincide com o eixo das abscissas. Uma vez que o centro é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, então $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$, $c > 0$, de acordo com a figura anterior. Por definição, temos que $|F_1P| + |F_2P| = 2a$, $a > c > 0$. Desenvolvendo-se esta igualdade, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.13}$$

a equação reduzida da elipse para este caso.

De forma análoga, podemos obter

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{1.14}$$

a equação reduzida da elipse com centro na origem e focos sobre o eixo das ordenadas.

Da análise destas deduções, temos os comprimentos do

- eixo maior: $|EM| = 2a$;
- eixo menor: $|Em| = 2b$;
- latus rectum: $|LR| = \dfrac{2b^2}{a}$.

Exemplo 1.17. Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P\left(1, \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$ sobre a elipse

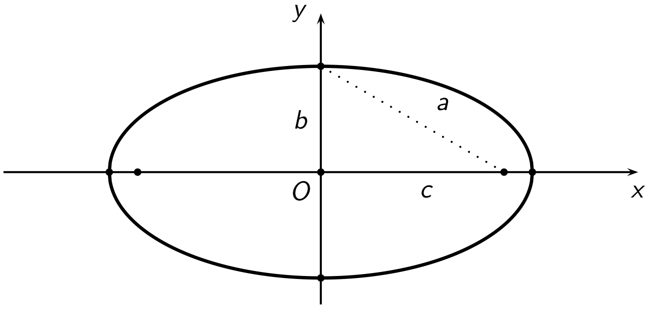
$$5x^2 + 4y^2 = 20.$$

Solução: Como $a^2 = 5$ e $b^2 = 4$, segue que $5 = 4 + c^2$, ou seja, $c = 1$. Desta forma $F_1(1, 0)$ e $F_2(-1, 0)$. Logo, $d(P, F_1) = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$ e $d(P, F_2) = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \left(\dfrac{\sqrt{31}}{2}\right)$.

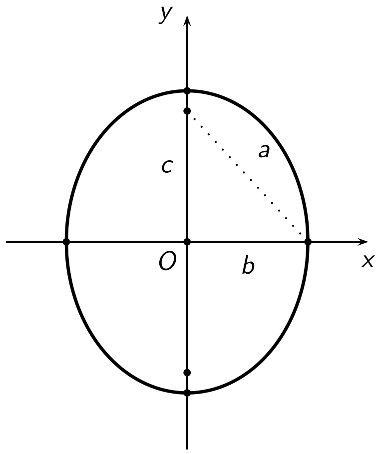
Exemplo 1.18. Prove que o comprimento do latus rectum é $\dfrac{2b^2}{a}$.

Solução: Consideremos as equações $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $x = c$, respectivamente, a da elipse de centro na origem e comprimentos do eixo maior a e menor b, com eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas, e a da reta perpendicular ao eixo dos x passando por c. Observe que a interseção dos gráficos da elipse e da reta são as extremidades L e R do latus rectum da elipse. Resolvendo-se o sistema encontraremos $x = c$ e $y = \pm\dfrac{b^2}{a}$. Logo, $|LR| = \dfrac{2b^2}{a}$.

A tabela a seguir apresenta um resumo das principais características da elipse quando o eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Excentricidade da Elipse

Chamamos de *excentricidade* (e) da elipse a razão entre os comprimentos do segmento $\overline{F_1F_2}$ e do segmento $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$\boxed{e = \frac{c}{a} < 1.}$$

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da elipse com centro $O'(h,k)$ fora da origem do sistema Oxy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso basta transladarmos o sistema Oxy para uma nova origem coincidindo com o centro O', obtendo-se um novo sistema $O'x'y'$. Assim, as equações destas elipses se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1}.$$

Porém, pelas equações de translação (1.1) temos que

$$\begin{cases} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}. \qquad (1.15)$$

Exemplo 1.19. Determine a equação reduzida da elipse de centro $O'(-3,2)$, eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas e comprimentos dos eixos maior e menor iguais a 6 e 4, respectivamente.

Solução: Como o eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas, a equação é $\dfrac{x'^2}{b^2} + \dfrac{y'^2}{a^2} = 1$. O centro é $O'(-3,2)$. Segue que $x' = x + 3$ e $y' = y - 2$. $2a = 6$ e $2b = 4$, ou seja, $a = 3$ e $b = 2$. Logo, a equação reduzida procurada é $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$.

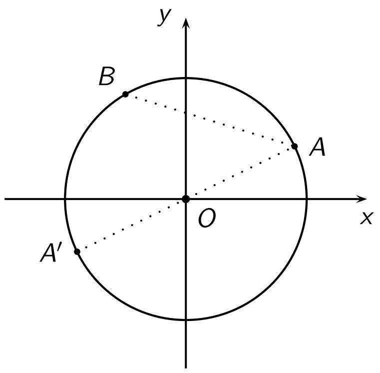
1.5.3 A Circunferência

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano π que eqüidistam de um ponto fixo $O(x_0, y_0)$ deste plano, ou seja, $d(P, O) = r$, $P, O \in \pi$. Segue que, $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$. Portanto,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{1.16}$$

a equação reduzida da circunferência.

Como elementos de uma circunferência temos:



$x^2 + y^2 = r^2$

- O centro $O(x_0, y_0)$;
- O raio r: Segmento de reta cujos extremos são o centro O e um ponto arbitrário da circunferência;
- A corda: Segmento de reta obtido pela união de dois pontos quaisquer da circunferência;
- O diâmetro $(2r)$: Corda que passa pelo centro.

Ao desenvolvermos a equação reduzida em (1.16) obtemos a equação geral da circunferência

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \tag{1.17}$$

1.5.4 Exercícios Propostos

EP 1.21. Determine o centro e o raio das circunferências a seguir

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ (b) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 8y - 34 = 0$ (c) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 44 = 0$

EP 1.22. Determine a equação reduzida da circunferência que passa pelo ponto $A(-2, 3)$ e de centro em $O(2, -1)$.

EP 1.23. Determine a equação reduzida da elipse de centro $O'(3, 2)$, eixo focal paralelo ao eixo das abscissas e comprimentos dos eixos maior e menor iguais a 5 e 3, respectivamente.

EP 1.24. Em cada um dos seguintes ítens, determine a equação da elipse, a partir dos elementos dados:

(a) Focos $F_1(3, 8)$ e $F_2(3, 2)$, e comprimento do eixo maior 10;

(b) Vértices $A_1(5, -1)$ e $A_2(-3, -1)$, e excentricidade $\dfrac{3}{4}$;

(c) Centro $C(-1, -1)$, vértice $V(5, -1)$ e excentricidade $\dfrac{2}{3}$;

(d) Centro $C(1, 2)$, focos $F(6, 2)$ e $P(4, 6)$ é ponto de seu gráfico;

(e) Focos $F_1(-4, -2)$ e $F_2(-4, -6)$, e comprimento do latus rectum 6;

(f) Vértice $V(3, -3)$ e extremidades do eixo menor $B_1(2, 2)$ e $B_2(-2, -2)$;

(g) Centro sobre a reta $r : y = 2$, foco $F(3, 4)$, excentricidade $e = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ e os seus eixos são paralelos aos eixos coordenados;

EP 1.25. Considere as equações das elipses:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0 \quad (1.18)$$
$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0. \quad (1.19)$$

Determine para cada uma delas os seguintes itens:

(a) As coordenadas dos vértices e dos focos;

(b) A excentricidade e o comprimento do latus rectum.

(c) As equações dos eixos focal e normal;

(d) Os comprimentos dos eixos maior e menor.

EP 1.26. Um ponto $P(x, y)$ se desloca de modo que a soma de suas distâncias aos pontos $A(3, 1)$ e $B(-5, 1)$ é 10. Diga a natureza da curva descrita pelo ponto P e em seguida determine sua equação.

EP 1.27. Determine a equação da cônica com centro na reta $r : x - 3 = 0$, eixo focal paralelo a Ox, com vértice no ponto $(7, 0)$ e excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$.

EP 1.28. Determine e identifique a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cujas abscissas e ordenadas são, respectivamente, iguais às abscissas e às metades das ordenadas dos pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.

EP 1.29. Um matemático aceitou um cargo numa nova universidade situada a 6 km da margem retilínea de um grande lago. O professor deseja construir uma casa que esteja a uma distância à universidade igual à metade da distância até a margem do lago. Os possíveis locais satisfazendo essa condição pertencem a uma curva. Defina esta curva e determine sua equação em relação a algum sistema à sua escolha.

EP 1.30. Um segmento $\overline{AB}$ de $12u.c.$ (unidades de comprimento), desloca-se de modo que A percorre o eixo Ox e B percorre o eixo Oy. O ponto $P(x, y)$ é interior ao segmento $\overline{AB}$ e fica situado a $8u.c.$ de A. Estabeleça a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto P.

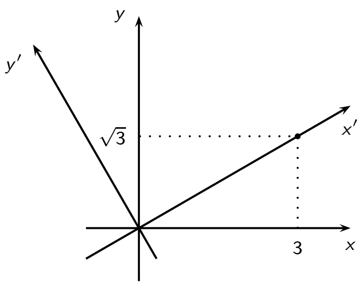
EP 1.31. Determine os comprimentos dos raios focais PF_1 e PF_2 onde P é um dos extremos do latus rectum da elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

EP 1.32. Determine a equação geral da elipse com um dos focos em $F_1(-2, 1)$, eixo normal $y = -1$ e excentricidade $e = \dfrac{1}{4}$.

EP 1.33. Uma elipse tem por equação $\dfrac{y'^2}{16} + \dfrac{(x'+2)^2}{7} = 1$ se em relação ao sistema $x'Oy'$ (ver figura).

(a) Esboce o gráfico desta cônica destacando cada latus rectum;

(b) Determine as coordenadas dos focos em relação ao eixo.



EP 1.34. Determine a equação da elipse de centro sobre a reta $x = -3$, um de seus vértices $(3, 4)$ e excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$ sabendo que seu eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados.

EP 1.35. Fazer o esboço gráfico da cônica de equação $7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy - 8 = 0$ destacando cada latus rectum e determinar uma equação do eixo focal em relação ao sistema xOy.

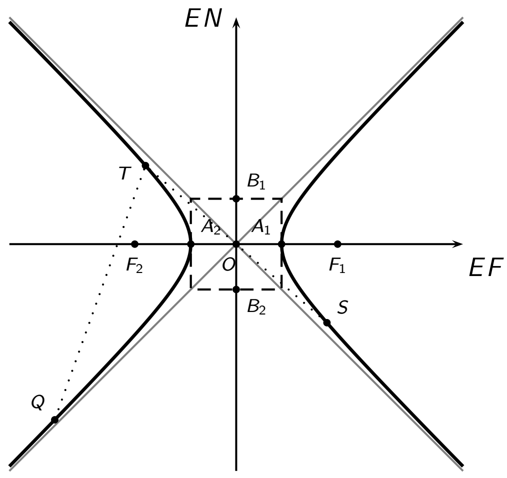
EP 1.36. Determine o comprimento do latus rectum da elipse de vértices $(1, 2)$ e $(5, 4)$, sabendo que o comprimento do eixo menor é de 2 unidades.

EP 1.37. Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P\left(3, \dfrac{7}{4}\right)$ sobre a elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

EP 1.38. Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P\left(1, \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$ sobre a elipse $5x^2 + 4y^2 = 20$.

1.6 A Hipérbole

1.9 Definição. Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante e menor que a distância entre esses pontos fixos.



Observa-se que a hipérbole é uma curva constituída de dois ramos distintos.

Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π, um ponto P deste plano pertence a uma hipérbole H se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| < d(F_1, F_2).$$

Assim,

$$H = \{P \in \pi; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = K, K < d(F_1, F_2)\}. \quad (1.20)$$

1.6.1 Os Principais Elementos da Hipérbole

Como elementos da hipérbole temos:

† Os focos: são os pontos fixos F_1 e F_2, onde $d(F_1, F_2) = 2c$;

† O eixo focal EF: reta que passa pelos focos;

† O centro C: Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;

† O eixo normal EN: Reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;

† Os vértices A_1 e A_2: pontos de intersecção da hipérbole com o eixo focal;

† Eixo real ou transverso ET: segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);

† Eixo imaginário ou conjugado EC: segmento de reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro e cujo comprimento é obtido conhecendo-se os valores de K e de c;

† Os pontos B_1 e B_2: extremidades do eixo imaginário; que une os vértices B_1 e B_2 ($\overline{B_1B_2}$) e tendo o centro como ponto médio;

† A corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da hipérbole que podem estar no mesmo ramo ou em ramos distintos, por exemplo $\overline{ST}$;

† A corda focal: uma corda que passa pelo foco, por exemplo $\overline{QT}$;

† O *lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (ℓ_1 e ℓ_2);

† O raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da hipérbole, por exemplo ($\overline{F_2T}$).

1.10 Definição. Seja H uma hipérbole cujo os comprimentos do eixo transverso $\overline{A_1A_2}$, do eixo conjugado $\overline{B_1B_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$, $2b$ e $2c$. Então

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

1.11 Teorema. Considere a hipérbole H da definição 1.10. Então

$$||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a.$$

Prova: Análoga a do teorema 1.8.

Exemplo 1.20. Determine a equação do lugar geométrico descrito por um ponto que se desloca de modo que a diferença de suas distâncias aos pontos $P_1(-6,-4)$ e $P_2(2,-4)$ seja igual a $6u$.

Solução: Pela definição, podemos deduzir que este lugar geométrico plano trata de uma hipérbole e que os pontos P_1 e P_2 são os seus focos. Portanto, sendo $P(x,y)$ um ponto genérico da hipérbole, temos que $|d(P,P_1) - d(P,P_2)| = 6$. Segue que, $d(P,P_1) - d(P,P_2) = 6$ ou $d(P,P_1) - d(P,P_2) = -6$. Vamos desenvolver a primeira destas equações. Acompanhe o raciocínio!

$$\begin{array}{rcl}
6 & = & d(P,P_1) - d(P,P_2) \\
6 & = & \sqrt{(x-(-6))^2 + (y-(-4))^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-(-4))^2} \\
\sqrt{(x+6)^2 + (y+4)^2} & = & \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2} + 6 \\
\sqrt{x^2 + 12x + 36 + y^2 + 8y + 16} & = & \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16} + 6 \\
(\sqrt{x^2 + 12x + y^2 + 8y + 52})^2 & = & (\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} + 6)^2 \\
x^2 + 12x + y^2 + 8y + 52 & = & x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20 + 12\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} + 36 \\
12x + 52 & = & -4x + 56 + 12\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} \\
16x - 4 & = & 12\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20} \\
(4x-1)^2 & = & (3\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20})^2 \\
16x^2 - 8x + 1 & = & 9(x^2 - 4x + y^2 + 8y + 20) \\
16x^2 - 8x + 1 & = & 9x^2 - 36x + 9y^2 + 72y + 180 \\
7x^2 + 28x - 9y^2 - 72y - 179 & = & 0
\end{array}$$

Como exercício, desenvolva a segunda equação por um raciocínio análogo e verifique que equação você encontrou.

1.6.2 As Equações Padrões de uma Hipérbole

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da hipérbole de centro na origem dos eixos coordenados e cujo eixo focal coincide com o eixo das abscissas. Uma vez que o centro é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, então $F_1(c,0)$ e $F_2(-c,0)$, $c > 0$ (Veja figura anterior). Por definição, temos que:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a, \qquad c > a > 0.$$

Desenvolvendo a igualdade acima, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.21}$$

a equação reduzida da hipérbole para este caso.

De forma análoga, podemos obter a equação reduzida da hipérbole

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \tag{1.22}$$

com centro na origem e focos sobre o eixo das ordenadas.

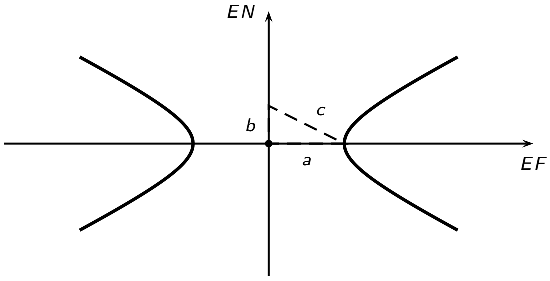
Da análise destas deduções, temos

1. Comprimento do eixo transverso: $|ET| = 2a$;
2. Comprimento do eixo conjugado: $|EC| = 2b$;
3. Comprimento do latus rectum: $|LR| = \frac{2b^2}{a}$ (Prove como exercício).

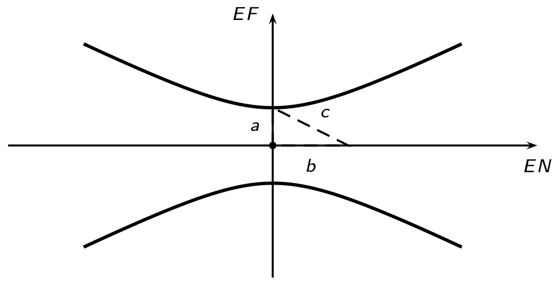
Exemplo 1.21. Determine uma equação da hipérbole de focos $F(\pm 2, 0)$ e vértices $A(\pm 1, 0)$.

Solução: Como $F(\pm 2, 0)$, o centro é $O(0, 0)$ e $c = 2$. Podemos concluir também que a equação é do tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Façamos $F_1(2, 0)$ e $A_1(1, 0)$, donde $c - a = 1$. Segue que $a = 1$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos $b = \sqrt{3}$. Portanto, a equação da hipérbole procurada é: $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$.

A tabela a seguir apresenta um resumo das principais características da hipérbole quando o eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da hipérbole com centro $O'(h, k)$ fora da origem do sistema Oxy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso, basta transladarmos o sistema Oxy para uma nova origem coincidindo com o centro O', obtendo-se um novo sistema $O'x'y'$. Assim, as equações destas elipses se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1}.$$

Porém, pelas equações de translação (1.1) temos que

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k. \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}. \tag{1.23}$$

Excentricidade da Hipérbole

Definimos a *excentricidade* 'e' da hipérbole a razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$\boxed{e = \frac{c}{a} > 1.}$$

Exemplo 1.22. Determine a excentricidade da hipérbole cujos comprimentos dos eixos transverso e conjugado são iguais a 4 e 6, respectivamente.

Solução: Temos que $2a = 4$ e $2b = 6$. Assim, $a = 2$ e $b = 3$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, segue que, $c = \sqrt{13}$ e $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

1.6.3 Exercícios Propostos

EP 1.39. Determine uma equação da hipérbole de focos $F(\pm 5, 0)$ e vértices $A(\pm 3, 0)$.

EP 1.40. Determine o comprimento do latus rectum da hipérbole da questão 1.39.

EP 1.41. Determine a equação reduzida da hipérbole de centro $O'(2, -3)$, eixo normal paralelo ao eixo das ordenadas e comprimentos dos eixos transverso e conjugado iguais a 4 e 6, respectivamente.

EP 1.42. Em cada uma dos seguintes ítens, determine a equação da hipérbole, a partir dos elementos dados:

(a) focos $F_1(-1, 3)$ e $F_2(-7, 3)$ e comprimento do eixo transverso igual a 4;

(b) vértices $A_1(5, 4)$ e $A_2(1, 4)$ e comprimento do latus rectum igual a 5;

(c) focos $F_1(2, 13)$ e $F_2(2, -13)$ e comprimento do eixo não transverso igual a 24;

(d) centro $C(0, 0)$, um dos focos $F(4, 4)$ e um dos vértices $A(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$;

(e) assíntotas $r : 4x + y - 11 = 0$ e $s : 4x - y - 13 = 0$ e um dos vértices $A(3, 1)$;

(f) um dos focos $F(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, eixo normal $EN : y = -x$ e excentricidade $e = \dfrac{3}{2}$;

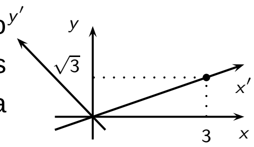
(g) eixo normal $y = 2$, uma das assíntotas $r : 2x - y = 4$ e comprimento do latus rectum igual a 3;

EP 1.43. Dada a equação

$$xy - 3x + 4y - 13 = 0, \tag{1.24}$$

identifique a cônica e determine as coordenadas dos vértices e dos focos, as equações dos eixos focal e normal, a excentricidade e o comprimento do latus rectum.

EP 1.44. Uma hipérbole tem por equação $(x' - 2)^2 - y'^2 = 4$ se em relação ao sistema $x'Oy'$ indicado na figura. Determine em relação ao sistema xOy: (a) as coordenadas dos vértices e dos focos; (b) as equações das assíntotas; (c) a sua equação.



EP 1.45. Escreva a equação da hipérbole conjugada da hipérbole de equação $16x^2 - 9y^2 = 144$. Determine, também, de cada curva, as coordenadas dos focos e as equações das assíntotas.

EP 1.46. Determine a equação da hipérbole equilátera de focos nos pontos $F_1(1, 6)$ e $F_2(1, -2)$.

EP 1.47. Dois vértices de um triângulo são os pontos $A(1, 0)$ e $B(5, 0)$. Determine a equação do lugar geométrico do terceiro vértice C, se este se move de forma que a diferença entre os comprimentos dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é sempre igual à metade do comprimento do lado $\overline{AB}$.

EP 1.48. Dada a equação $5y^2 - 4x^2 + 10y + 16x - 31 = 0$, determine as coordenadas dos focos e vértices, a excentricidade, a medida do latus rectum e a equação de eixo normal. Esboce o gráfico.

EP 1.49. Esboce o gráfico da cônica de equação $11x^2 + y^2 + 10\sqrt{3}xy + 16 = 0$ e determine as equações das assíntotas em relação ao sistema xOy.

EP 1.50. Determine a equação geral da hipérbole de centro no ponto $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, um dos seus vértices em $(0, 0)$ e excentricidade $\dfrac{5}{3}$.

EP 1.51. Determine uma equação da hipérbole de vértices nos pontos $A_1(1, 2)$ $A_2(-1, -2)$ e comprimento do latus rectum igual a $2\sqrt{5}$.

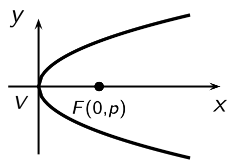
EP 1.52. Determine uma equação da hipérbole cujo eixo focal está sobre a reta $r : y + 2 = 0$, possui equação de uma das assíntotas $-x + y + 5 = 0$ e de latus rectum medindo $10u$.

A Etimologia das Palavras que Definem as Seções Cônicas

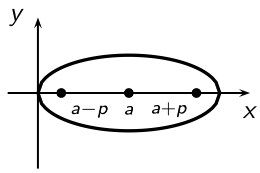
Arquimedes e os pitagóricos foram os primeiros a empregar as palavras Parábola, Elipse e Hipérbole, porém, com outra acepção da atual: seções a uma superfície cônica, que se deve a Apolônio.

Traduzida do grego

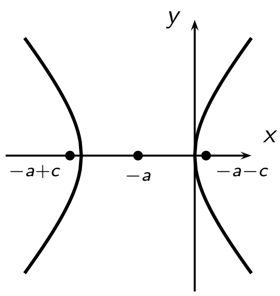
— '$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$' a palavra parábola significa: comparação; igualdade. Deve-se ao fato da igualdade $y^2 = \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Parábola de vértice na origem e foco sobre o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $y^2 = 4p \cdot x$. Como o comprimento do latus rectum de uma parábola é $\ell = 4p$, temos, portanto, $y^2 = \ell \cdot x$.



— '$\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\zeta$' a palavra elipse significa: falta; omissão. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 < \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Elipse de centro no ponto $(a, 0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo maior e menor da elipse de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Isolando y^2, obtemos $y^2 = \dfrac{2b^2}{a}x - \dfrac{b^2x^2}{a^2}$. Como o comprimento do latus rectum de uma elipse é $\ell = \dfrac{2b^2}{a}$, temos, portanto, $y^2 = \ell x - \dfrac{b^2x^2}{a^2}$. Donde, podemos concluir que $y^2 < \ell \cdot x$.



— '$\upsilon\pi\epsilon\rho\beta o\lambda\eta$' a palavra hipérbole significa: excesso; exagero. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 > \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Hipérbole de centro no ponto $(-a, 0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo real e imaginário da Hipérbole de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\dfrac{(x+a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Seguindo o mesmo raciocínio adotado anteriormente para a Elipse, com as devidas alterações, podemos concluir que $y^2 > \ell \cdot x$.



1.7 A Equação Geral de Grau Dois e as Cônicas

Sabemos que equações a duas variáveis de grau um podem representar no plano uma reta. Veremos, nesta seção, sob que condições uma equação de grau dois pode representar uma cônica. A equação (1.5), página 14, de segundo grau a duas variáveis pode representar uma cônica. De fato, podemos transformá-la na equação (1.6) e, posteriormente, transladarmos para uma nova origem. Enunciaremos um teorema o qual ficará facilmente provado após as definições que serão vistas nas próximas seções.

1.12 Teorema. Considere a equação (1.6) da página 1.5. Se a' ou c' são não nulos, então ela representa uma seção cônica que pode ser reconhecida por:

1. Se $a' \neq 0$, $c' = 0$ e $e' \neq 0$ ou $a' = 0$, $c' \neq 0$ e $d' \neq 0$, então a equação (1.6) representa uma parábola. No primeiro caso a parábola possui eixo de simetria paralelo, ou coincidente, ao eixo Oy'. No segundo, este eixo é paralelo, ou coincidente, ao eixo Ox'. Se $e' = 0$, no primeiro caso, ou $d' = 0$, no segundo, a equação representa duas retas distintas paralelas, ou coincidentes, ao eixo Ox', Oy', respectivamente, ou nenhum lugar geométrico, conforme as raízes da equação $a'x'^2 + d'x' + f' = 0$ ou $c'y'^2 + e'y' + f' = 0$ sejam, respectivamente, reais e desiguais, reais e iguais ou complexas;

2. Se a' e c' são não nulos e de mesmo sinal, a equação (1.6) representa uma elipse;

3. Se a' e c' são não nulos e de sinais contrários, a equação (1.6) representa uma hipérbole.

Pode-se determinar ainda qual cônica a equação (1.5) representa sem termos, necessariamente, que aplicar as equações de rotação. Para isso basta fazermos $I = b^2 - 4ac$ e com base no sinal de I verificarmos qual seção cônica teremos. Assim,

Cônica	Elipse	Parábola	Hipérbole
Índice	$I < 0$	$I = 0$	$I > 0$

Exemplo 1.23. Determine a natureza do lugar geométrico descrito pela equação

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0.$$

Solução: A natureza da curva é elíptica, pois, $I = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -24$.

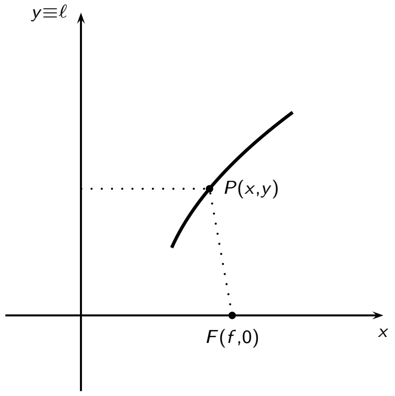
1.8 A Equação Geral das Cônicas

Podemos obter a equação geral das cônicas se partimos da seguinte afirmação:

1.13 Definição. Sejam ℓ uma reta fixa (diretriz) e $F \notin \ell$ (foco) um ponto fixo. O lugar geométrico dos pontos P do plano determinado por ℓ e F, cuja razão entre as distâncias de F a P e de P a ℓ é uma constante positiva e (excentricidade), representa uma seção cônica.

Vejamos como as cônicas até aqui apresentadas se enquadram nesta definição.

Considere $F(f, 0)$, $\ell : x = 0$ e $P(x, y)$.



Pela definição (1.13) temos

$$\begin{aligned}
\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} &= e \\
\frac{\sqrt{(x-f)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2}} &= e \\
(x-f)^2 + y^2 &= e^2x^2 \\
x^2 - 2fx + f^2 + y^2 - e^2x^2 &= 0 \\
(1-e^2)x^2 - 2fx + y^2 + f^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Se $e = 1$, temos $y^2 = 2f\left(x - \frac{f}{2}\right)$, uma parábola de vértice em $\left(\frac{f}{2}, 0\right)$ e eixo focal coincidente com o eixo das abscissas.

Se $e \neq 1$, temos $x^2 - \frac{2f}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{f^2}{1-e^2} = 0$, que, claramente, representa uma elipse se $e < 1$, ou uma hipérbole se $e > 1$. Efetuando-se os cálculos necessários podemos chegar facilmente à forma reduzida dada por

$$\frac{\left[x - \dfrac{f}{(1-e^2)}\right]^2}{\dfrac{e^2f^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2f^2}{(1-e^2)}} = 1.$$

O valor de e apresentado aqui é idêntico ao valor $\frac{c}{a}$ que fora introduzido em seções anteriores. De fato, no caso da hipérbole, temos $a^2 = \frac{e^2f^2}{(1-e^2)^2}$ e $b^2 = \frac{e^2f^2}{(e^2-1)}$. Das relações fundamentais seque que

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{e^2f^2}{(1-e^2)^2} + \frac{e^2f^2(e^2-1)}{(1-e^2)^2} = \frac{e^4f^2}{(1-e^2)^2}.$$

Logo, $\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{e^4 f^2}{(1-e^2)^2} \cdot \dfrac{(1-e^2)^2}{e^2 f^2}$, ou seja, $e = \dfrac{c}{a}$.

Exemplo 1.24. Mostre que o comprimento do latus rectum da hipérbole (ou elipse) é $2|f|e$, onde e é a excentricidade da cônica e f é a distância de um dos focos à diretriz mais próxima.

Solução: $|LR| = \dfrac{2b^2}{a} = 2\dfrac{f^2e^2}{e^2-1} \cdot \dfrac{|1-e^2|}{|f|e} = 2\dfrac{|f|^2e^2}{e^2-1} \cdot \dfrac{|1-e^2|}{|f|e} = 2\dfrac{|f|e}{e^2-1} \cdot |1-e^2| = 2\dfrac{|f|e}{e^2-1} \cdot |1-e^2| = 2|f|e$.

Uma conseqüência da definição (1.13) é que, assim como as parábolas, as elipses e as hipérboles apresentam diretrizes.

1.8.1 Diretrizes das Elipses e das Hipérboles

Considere a elipse E de centro na origem do sistema Oxy e focos em $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Portanto, a equação que representa o lugar geométrico dos seus pontos é $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Sendo assim, as equações das diretrizes ℓ_1 e ℓ_2 de E são da forma $x = \alpha$ e $x = -\alpha$, respectivamente. De acordo com a definição (1.13) temos que para todo ponto $P(x, y) \in E$, $\dfrac{d(P, F_1)}{d(P, \ell_1)} = e$. Portanto, para o vértice $A_1(a, 0)$, temos que $\dfrac{d(A_1, F_1)}{d(A_1, \ell_1)} = e$. Segue que, $\dfrac{a-c}{\alpha - a} = \dfrac{c}{a}$. Fazendo-se os devidos ajustes encontramos $\alpha = \dfrac{a}{e}$. Podemos concluir, portanto, que as equações das diretrizes correspondentes aos focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $x = \dfrac{a}{e}$ e $x = -\dfrac{a}{e}$.

De forma análoga, encontramos as mesmas equações para as diretrizes da hipérbole.

1.8.2 Exercícios Propostos

EP 1.53. Obtenha a equação da elipse de focos em $(6, 1)$ e $(-2, 1)$ e equação de uma das diretrizes $x = 11$.

EP 1.54. Determine as diretrizes da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 4y$ e esboce o gráfico.

EP 1.55. Determine as diretrizes da elipse de equação $x^2 + y^2 = 8y$ e esboce o gráfico.

EP 1.56. Determinar a equação da hipérbole de vértice $V(3, -1)$ e uma das diretrizes $y - 1 = 0$.

EP 1.57. Determinar a equação da seção cônica cujo foco é o ponto $F(-1, -2)$, cuja equação da diretriz é $\ell : x - y + 1 = 0$ e de excentricidade $e = 0,5$.

EP 1.58. um ponto se desloca de modo que a sua distância à reta $r : y = -4$ equivale a três meios de sua distância ao ponto $Q(3, 2)$. Determine a equação do lugar geométrico assim gerado.

EP 1.59. Escreva uma equação da elipse de excentricidade $\dfrac{1}{3}$ cujos focos coincidem com os vértices da hipérbole $H : 16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

EP 1.60. Determine a equação reduzida da parábola cujo vértice coincide com o centro da hipérbole $H : 2x^2 - 7y^2 - 4x + 14y = 19$, e cuja diretriz coincide com o eixo focal da elipse $E : \dfrac{(x-1)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$.

EP 1.61. Determine a equação da elipse de excentricidade igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e com eixo maior coincidente com o latus rectum da parábola de equação $y^2 - 4y + 8x + 28 = 0$.

EP 1.62. Considere a curva $h : 4x^2 - y^2 - 8x + 4y - 16 = 0$ e determine:

(a) a equação de suas assíntotas;

(b) a equação geral da parábola cuja diretriz coincide com o eixo normal de h e cujo vértice coincide com o centro da elipse de equação $2x^2 + 7y^2 - 8x - 42y + 57 = 0$.

EP 1.63. Determine as equações dos eixos normal e focal da cônica de equação $x^2 + 2y^2 = 4x - 8y - 10$.

EP 1.64. Determine a equação da hipérbole cujo eixo transverso coincide com o eixo menor da elipse de equação $x^2 - 4x + 2y^2 + 8y + 10 = 0$ e uma das extremidades do eixo conjugado coincide com o vértice da parábola de equação $(y + 2)^2 = -16x - 16$.

EP 1.65. Considere a cônica de equação $C : 9y^2 - 36y - 16x^2 - 96x - 252 = 0$ e determine:

(a) As equações de suas assíntotas;

(b) A equação da elipse cujo eixo menor coincide com o eixo transverso de C e um dos focos coincide com o vértice da parábola $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$.

EP 1.66. Determine a equação de uma hipérbole cujo eixo focal é paralelo a Ox, de centro no foco da parábola $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$, um dos vértices da hipérbole é um dos vértices da elipse $(x-4)^2 + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$ e $(2 + 2\sqrt{2}, 0)$ um de seus pontos.

EP 1.67. Determine a equação reduzida da cônica que passa por $(1, 3)$ e cujos focos F_1 e F_2 são, respectivamente, as interseções da reta $r : x = 1$ e da parábola $x = y^2 - 1$.

EP 1.68. Considerando a curva $C : 4(x - 1)^2 - 9(y + 2)^2 = 36$, determine:

(a) As equações de suas assíntotas;

(b) A equação da parábola cujo vértice coincide com o centro de C e tem como diretriz a reta de equação $x + 2 = 0$;

(c) A equação da cônica de excentricidade $\dfrac{1}{2}$ e cujos focos coincidem com os vértices de C.

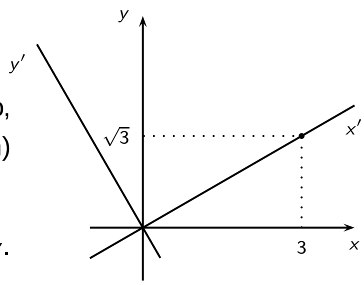
EP 1.69. Determine a equação reduzida da cônica que passa por $(1, 3)$ e cujos focos F_1 e F_2 são, respectivamente, as interseções da reta $r : x = 1$ e da parábola $x = y^2 - 1$.

EP 1.70. Uma cônica tem por equação $5y'^2 - 4x'^2 + 10y' = 15$ se em relação ao sistema $x'Oy'$ dado.

(a) Identifique esta cônica;

(b) Esboce o gráfico desta cônica identificando (destacando) o centro, os vértices, os eixos normal e focal, as assíntotas (caso existam) e cada um dos latus rectum em relação ao sistema $x'O'y'$;

(c) Determine as coordenadas dos focos em relação ao sistema xOy.



EP 1.71. Obtenha a equação geral da cônica a partir dos elementos dados:

(a) Foco $F(-1, -1)$, diretriz $\ell : 4x + 3y = 12$ e excentricidade $e = 5$;

(b) Foco $F(0, 0)$, diretriz $\ell : x + 2y = -2$ e excentricidade $e = 1$.

EP 1.72. Determine a equação parábola de vértice $V(0, 0)$ e diretriz $\ell : y + 2x + 10 = 0$

EP 1.73. Determine a equação da elipse onde um dos focos é $F_1(2, 2)$, uma das diretrizes $\ell_1 : x - 10 = 0$ e excentricidade $e = \dfrac{1}{3}$.

EP 1.74. Determine a equação da hipérbole de assíntotas $r: y + 2x - 2 = 0$ e $s: y - 2x + 2 = 0$ e foco $F_1(1+\sqrt{5}, 0)$;

EP 1.75. Dada a hipérbole de equação $x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 4y - 11 = 0$, determine as coordenadas dos focos, a equação do eixo focal e as equações das diretrizes.

EP 1.76. Determine a equação da cônica sabendo que o seu centro dista $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ unidades da diretriz e possui vértices $A_1(-3,3)$ e $A_2(1,3)$.

EP 1.77. Determine a equação da cônica sabendo que o seu centro dista $\dfrac{16}{5}$ unidades da diretriz e os focos são os pontos $F_1(2,4)$ e $F_2(2,-6)$.

EP 1.78. Determine uma equação da cônica de centro no ponto $C(2,2)$, foco no ponto $F(3,4)$ e diretriz $\ell: 2x + 4y - 17 = 0$.

EP 1.79. Determine a equação reduzida da cônica de centro no ponto $C(0,2)$, excentricidade $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e diretriz $d: x + y - 10 = 0$.

EP 1.80. Determine as coordenadas dos focos e as equações das diretrizes da hipérbole de equação

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 14\sqrt{2}x - 18\sqrt{2}y + 22 = 0.$$

EP 1.81. Determine a equação geral da elipse de diretrizes $\ell_1: y + 6 = 0$ e $\ell_2: y - 2 = 0$ e um dos focos em $F_1\left(1, -\dfrac{1}{4}\right)$

EP 1.82. Determine as equações das diretrizes das curvas (1.18) e (1.24).

EP 1.83. Determine a equação da elipse de vértices $A_1(7,0)$ e $A_2(-1,0)$ e diretriz $x = 11$.

EP 1.84. Determine a equação da hipérbole de centro $C(0,0)$, comprimento do eixo transverso igual a $4\sqrt{2}$ e uma de suas diretrizes é a reta $y = x + 2$.

EP 1.85. Considere os pontos $A(-1,0)$ e $B(2,0)$. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos M do plano não pertencentes à reta que passa por A e por B e tais que o ângulo B do triângulo AMB seja sempre o dobro do ângulo A deste triângulo. Esboce o gráfico.

EP 1.86. Determine a equação reduzida da parábola de diretriz $y + x = -2$, sabendo que os pontos $L_1(-1,3)$ e $L_2(3,-1)$ são as extremidades do *latus rectum*. Esboce seu gráfico.

EP 1.87. Determine a equação da cônica de centro $C(1,-2)$, comprimento do eixo conjugado igual a $4\sqrt{6}$ e $x - 3 = 0$ a equação de uma das suas diretrizes.

EP 1.88. Determine as coordenadas dos vértices e as equações das diretrizes da cônica de equação

$$7x^2 + 16y^2 - 96y + 39 = 0.$$

EP 1.89. Uma cônica possui foco em $F_1(2,7)$, diretriz $\ell_1: 4y - 37 = 0$ e passa pelo ponto Q. Sabendo que $d(Q, F_1) = 5u$ e $d(Q, \ell_1) = \dfrac{25}{4}u$, identifique e determine a equação desta cônica.

EP 1.90. Identifique as cônicas a seguir, justificando sua resposta.

(a) $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$;

(b) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$;

(c) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0$.

(d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$;

(e) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$;

(f) $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$;

(g) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$;

(h) $x^2 - 4y^2 - 4x - 24y - 36 = 0$;

(i) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$.

EP 1.91. Dada a cônica de equação $x^2 + y^2 - 2xy + \sqrt{2}x = 0$, determine as coordenadas do foco e uma equação da diretriz. Esboce o gráfico da cônica.

1.9 Surgimento da Geometria Analítica

A Geometria, como ciência dedutiva, foi criada pelos gregos. Mas, apesar do seu brilhantismo, faltava operacionalidade à geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria.

Ocorre, porém, que o fato de haver condições para uma descoberta não exclui o toque de genialidade de alguém. E no caso da geometria analítica, fruto dessa fusão, o mérito não foi de uma só pessoa. Dois franceses, Pierre de Fermat ($1.601 - 1.665$) e René Descartes ($1.596 - 1.650$), curiosamente ambos graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional, são os responsáveis por esse grande avanço científico: o primeiro, movido basicamente por seu grande amor, a matemática; e o segundo, por razões filosóficas. E, diga-se de passagem, não trabalharam juntos: a geometria analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes.

Se o bem-sucedido Pierre de Fermat, zeloso e competente conselheiro junto ao Parlamento de Toulouse, dedicava muitas de suas melhores horas de lazer à matemática, certamente não era porque faltasse, alguém em sua posição, outras maneiras de preencher o tempo disponível. Na verdade, Fermat simplesmente não conseguia fugir à sua verdadeira vocação e, apesar de praticar matemática como hobby, nenhum de seus contemporâneos contribuiu tanto para o avanço desta ciência quanto ele. Além da geometria analítica, Fermat teve papel fundamental na criação do Cálculo Diferencial, do Cálculo de Probabilidades e, especialmente, da Teoria dos Números, ramo da matemática que estuda as propriedades dos números inteiros.

A contribuição de Fermat à Geometria Analítica encontra-se num pequeno texto intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos e data, no máximo, de 1.636, mas que só foi publicado em 1.679, postumamente, junto com sua obra completa. É que Fermat, bastante modesto, era avesso a publicar seus trabalhos. Disso resulta, em parte, o fato de Descartes comumente ser mais lembrado como criador da Geometria Analítica.

O interesse de Descartes pela matemática surgiu cedo, no "College de la Fleche", escola do mais alto padrão, dirigida por jesuítas, na qual ingressara aos oito anos de idade. Mas, por uma razão muito especial, já revelava seus pendores filosóficos: a certeza que as demonstrações ou justificativas matemáticas proporcionam. Aos vinte e um anos de idade, depois de freqüentar rodas matemáticas em Paris (além de outras), já graduado em Direito, ingressa, voluntariamente, na carreira das armas, uma das poucas opções “dignas” que se ofereciam a um jovem como ele, oriundo da nobreza menor da França. Durante os quase nove anos que serviu em vários exércitos, não se sabe de nenhuma proeza militar realizada por Descartes. É que as batalhas que ocupavam seus pensamentos e seus sonhos travavam-se no campo das ciências e da filosofia.

A Geometria Analítica de Descartes apareceu em 1.637 no pequeno texto chamado “A Geometria”, como um dos três apêndices do Discurso do Método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

A Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive, sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não foi usada por nenhum deles. Mas, cada um a seu modo, sabia que a idéia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

Hygino H. Domingues

Gabarito

1.1. (a) $(y+4)^2-(x+1)^2=4$ (b) $4\left(y+\frac{9}{4}\right)^2+9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{109}{4}$ (c) $3\left(x\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=-\frac{1}{4}$. 1.2. (a) $x'^2+y'^2=4$ (b) $x'y'=1$ (c) $x'^2+y'^2-2x'-4y'-20=0$ (d) $4x'^2-y'^2=4$ (e) $x'^3-y'^2=0$. 1.3. (a) $x'^2+y'^2=4$, $O'(-3;1)$; $x=x'-3$; $y=y'+1$: (b) $P(4;-3)$ e $Q(-1;2)$. 1.4 (a) $(y-4)^2-(x-1)^2=19$, $x=x'+1$, $y=y'+4$, $O'(1,4)$. (b) $P_{x'y'}(-3,-1)$, $Q(2,6)$. 1.5 (a) $x'=x-1$; $y'=y+2$, $O'(1;-2)$ e $x'^2+y'^2=9$ (b) $x'=x+3$; $y'=y-4$, $O'(-3;4)$ e $x'^2+y'^2=25$ (c) $x'=x+1$; $y'=y-4$, $O'(-1;4)$ e $x'^2+y'^2=1$. 1.6. (a) $(3;-2)$ (b) $(6;-5)$ (c) $(1;-4)$ (d) $(-2;-4)$. 1.7. (a) $x'^2+y'^2=9$ (b) $x'^2+y'^2=25$ (c) $3x'^2+2y'^2=6$ (d) $y'^2-4x'=0$ (e) $x'^2-4y'^2=4$. 1.8 (a) $x'^2-y'^2=36$; (b) $\sqrt{29}x'-3=0$. 1.9 (a) $y'^2-2=0$; (b) $\sqrt{5}x'-2=0$. 1.10 (a) $4x'^2+y'^2=16$. (b) $x''^2+2y''^2=2$. (c) $5y'^2-4x'^2=100$. (d) (e) $x'^2=5y'$. 1.11 (a) $(y-4)^2=4(x-2)$ (b) $x^2+2xy+y^2+8x-8y=0$ (c) $(y-2)^2=-8(x-1)$ (d) $(x+1)^2=-(y-1)$ (e) $x^2+2xy+y^2+4x-12y+4=0$ (f) $(y-5)^2=-8(x-1)$ (g) $x^2=-4(y-3)$ ou $x^2=4(y-1)$. 1.12 Parábola. $y^2-6y-8x-23=0$. 1.13 $\frac{25}{2}$. 1.14 . 1.15 $(x+4)^2=-8(y-1)$. 1.16 . 1.17 $(x-2)^2=y-1$. 1.18 . 1.19 (I) (a) $V\left(-2;\frac{5}{2}\right)$, $F\left(1;\frac{5}{2}\right)$ (b) $\ell: x=-5$, $EF: y=\frac{5}{2}$ (c) $|LR|=12$. (II) (a) $V(0;0)$, $F(-2;-2)$ (b) $\ell: y=-x+4$, $EF: y=$ (c) $|LR|=8\sqrt{2}$. 1.20 (b) $F_{x'y'}(-2,0)$ e $\ell: x'=2$; (c) $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2+16\sqrt{3}x+16y=0$. 1.21. 1.22. 1.23 . 1.24. 1.25 (a) (A) $A_1(1,3)$, $A_2(-3,3)$; $F_1(-1+\sqrt{3},3)$, $F_2(-1-\sqrt{3},3)$ (B) $EF: y=3$; $EN: x=-1$ (C) $|LR|=1$; $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $|EM|=4$; $|Em|=2$. (b) (A) $V\left(-2,\frac{5}{2}\right)$; $F\left(1,\frac{5}{2}\right)$ (B) $\ell: x=-5$; $EF: 2y-5=0$ (C) $|LR|=12$; $e=1$. (c) (A) $A_1(3,6)$, $A_2(3,2)$; $F_1(3,4+\sqrt{13})$, $F_2(3,4-\sqrt{13})$ (B) $EF: x=3$; $EN: y=4$ (C) $|LR|=9$; $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$ (D) $|ET|=4$; $|EC|=6$. 1.26 $9x^2+25y^2+18x-50y-191=0$. 1.27. 1.28. 1.29. 1.30. 1.31. 1.32. 1.33. 1.34. 1.35. 1.36. 1.37 . 1.38. 1.39. 1.40. 1.41. 1.42 (a) $\frac{(x+4)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$; (b) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{5}=1$; (c) $114y^2-25(x-2)^2=3600$; (d) $xy=8$; (e) $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{\frac{1}{4}}=1$; (f) $9y^2+162xy+9x^2=640$; (g) $9(y-2)^2-36(x-3)^2=324$. 1.43. 1.44 (a) (b) (c) 1.45 Hipérbole dada: Focos: $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$; Assíntotas: $r: 3y-4x=0$, $s: 3y+4x=0$; Hipérbole conjugada: Equação: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$; Focos: $F_1(0,5)$, $F_2(0,-5)$; Assíntotas: as mesmas. 1.46. 1.47. 1.48 $A_1(-5,2)$, $A_2(-3,4)$; $F_1(-4-\sqrt{2},3-\sqrt{2})$, $F_2(-4+\sqrt{2},3+\sqrt{2})$; $EF: y=x+7$; $EN: y=-x-1$; $e=x+7$; $|LR|=2\sqrt{2}$. 1.49. 1.50. 1.51. 1.52. 1.53. 1.54. 1.55. 1.56. 1.57. 1.58 $9x^2+5y^2-54x-68y+53=0$. 1.59 $\frac{(x-2)^2}{128}+\frac{(y+1)^2}{144}=1$. 1.60 $(x-1)^2=12(y-1)$. 1.61. 1.62. 1.63. 1.64 $x^2-9y^2-4x-36y+9=0$. 1.65 . 1.66. 1.67. 1.68. 1.69. 1.70 (a) Hipérbole; (b) $\frac{(y'+1)^2}{4}-\frac{(x')^2}{5}=1$, $C(0,-1)$; $A_1(0,1)$; $A_2(0,-3)$; $B_1(\sqrt{5},-1)$; $B_2(-\sqrt{5},-1)$; $F_1(0,2)$; $F_2(0,-4)$; $EF: x'=0$; $EN: y'=-1$; assíntotas $y'=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x'-1$. (c) $F_1(-1,\sqrt{3})$; $F_2(2,-2\sqrt{3})$. 1.71 (a) $15x^2+24xy+8y^2-98x-74y+142=0$ (b) $4x^2-4xy+y^2-4x-8y-4=0$. 1.72 $x^2-4xy-4x-8y-4=0$. 1.73 $8x^2+9y^2-16x-36y-28=0$. 1.74 $4x^2-y^2-8x=0$. 1.75. 1.76. 1.77. 1.78. 1.79. 1.80. 1.81. 1.82. 1.83 $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 1.84 $\frac{(x-y)^2}{16}-\frac{x+y}{48}=1$. 1.85 Ramo direito da hipérbole $3x^2-y^2=3$, excluindo-se o vértice. 1.86 $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$. 1.87. 1.88. 1.89. 1.90. 1.91 $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$; $\ell: 4x+4y-\sqrt{2}=0$.

tema 2 Sistema de Coordenadas Polares

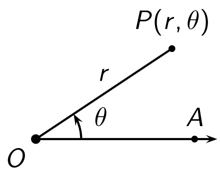
Apresentação

O sistema de coordenadas polares é um outro dispositivo que podemos utilizar para localizar pontos no plano e, conseqüentemente, representar lugares geométricos através de equações. Um dos principais fatores que justificam a introdução desse sistema de coordenadas se deve ao fato de que alguns lugares geométricos neste possuem equações mais simples do que no de coordenadas cartesianas.

2.1 Coordenadas Polares

Um ponto no plano é localizado através de um sistema de coordenadas. Por exemplo, o sistema de coordenadas cartesianas xOy. Outro sistema de coordenadas muito utilizado é o de *coordenadas polares* onde consideraremos uma semi-reta horizontal, chamada de *eixo polar*, e de origem em um ponto O, chamado de *pólo*. A semi-reta perpendicular que passa por O chamaremos de *eixo a* 90° ou *eixo normal*.

Qualquer ponto P do plano será localizado no sistema de coordenadas polares pelo par (r, θ) denominado coordenadas polares, onde r indica a distância do ponto P ao pólo O e é denominado *raio vetor* ou *raio polar*, e o ângulo θ obtido da rotação do eixo polar até o segmento $\overline{OP}$, o qual chamaremos de *ângulo vetorial* ou *ângulo polar* de P.

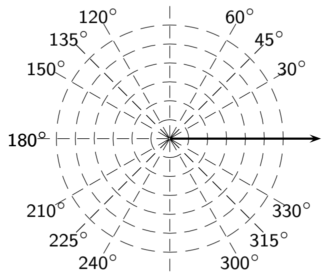


Consideraremos o ângulo polar positivo quando a rotação do eixo polar for feita no sentido anti-horário e, o negativo, no sentido horário, tal como fazemos no estudo de trigonometria. Se $P(r, \theta)$ possui raio vetor negativo ($r < 0$) devemos rotacionar o eixo polar em $\pi + \theta$ e marcar $|r|$ unidades a partir do pólo O.

Ao pólo podemos associar o par de coordenadas $(0, \theta)$, em que θ representa um ângulo qualquer.

2.1.1 Exercício Proposto

EP 2.1. Utilizando o papel de coordenadas polares, posicione os pontos no plano dadas suas coordenadas polares: $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(-3, \frac{\pi}{2}\right)$,4$C\left(-5, 3\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(6, 7\frac{\pi}{3}\right)$, $E\left(\frac{3}{2}, -4\frac{\pi}{3}\right)$, $F(-2, 315°)$, $G\left(4, -\frac{\pi}{3}\right)$, $H\left(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$, $I(-3, 15°)$, $J\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$, $K\left(5, \frac{7\pi}{4}\right)$, $L\left(-4, \frac{11\pi}{6}\right)$, $M(1, 1)$, $N(6, 2)$.



2.2 Igualdade entre Dois Pontos em Coordenadas Polares

Observe que um ponto $P(r, \theta)$ em coordenadas polares determina um único ponto no plano. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, pois um ponto $P(r, \theta)$ do plano pode ser representado por $(r, \theta + 2k\pi)$ ou $(-r, \theta + (2k + 1)\pi)$, onde $r \in \mathbb{R}$, θ em radianos e $k \in \mathbb{Z}$. De forma resumida, temos:

$$(r; \theta) = ((-1)^k \cdot r; \theta + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.25}$$

2.2.1 Exercícios Propostos

EP 2.2. Verifique quais dos seguintes pares de coordenadas polares representa o ponto $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$.

$A\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$, $B\left(-2, \frac{13\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $D\left(2, \frac{25\pi}{3}\right)$, $E\left(2, \frac{11\pi}{3}\right)$, $F\left(-2, \frac{37\pi}{3}\right)$.

EP 2.3. Dados os pontos $P_1(3, 5\frac{\pi}{3})$, $P_2(-3, 330°)$, $P_3(-1, -\frac{\pi}{3})$, $P_4(2, -315°)$, $P_5(0, 53°)$, $P_6(0, e^{\pi})$ e $P_7(1, 3)$, determine:

(a) A representação gráfica de cada um desses pontos no plano polar;

(b) Três outros conjuntos de coordenadas polares para os pontos P_3 e P_4;

(c) As coordenadas retangulares dos pontos P_1, P_5 e P_7;

(d) Quais desses pontos coincidem com o ponto $P(3, 2310°)$;

EP 2.4. Determine os valores de x e y sabendo que os pontos $(x - 3, 30°)$ e $(2, y - 60°)$ são iguais.

2.3 Determinação Principal de um Ponto

Um ponto (r, θ) em coordenadas polares se encontra em sua *determinação principal* se, e somente se,

$$\begin{cases} r & \geq & 0 \\ \theta & \in & [0, 2\pi). \end{cases}$$

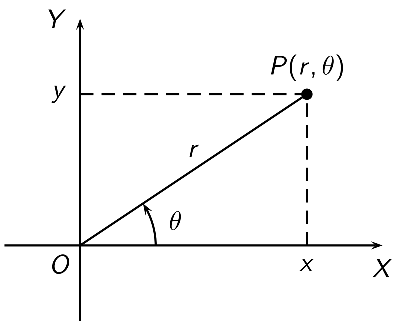
Adota-se a determinação principal do pólo como sendo o par $(0, 0)$. Observemos que, por definição, o pólo é o único ponto do plano polar que não possui um conjunto principal.

2.3.1 Exercício Proposto

EP 2.5. Encontre a determinação principal dos seguintes pontos: $P_1\left(-3, 51\frac{\pi}{3}\right)$, $P_2(-3, 3320°)$, $P_3\left(-1, -\frac{17\pi}{3}\right)$, $P_4(2, -715°)$ e $P_5(4, 530°)$.

2.4 Transformações entre Coordenadas Polares e Retangulares

Façamos coincidir as origens e os eixos Ox e polar dos sistemas de coordenadas cartesiano e polar, respectivamente. Seja P um ponto cujas coordenadas cartesianas são (x, y) e (r, θ) as suas coordenadas polares. De acordo com a figura abaixo temos



Logo,

$$\begin{cases} x & = & r \cdot \cos(\theta), \\ y & = & r \cdot \text{sen}(\theta). \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, temos que

$$\begin{array}{rclrcl} r & = & \pm\sqrt{x^2+y^2}, & \cos(\theta) & = & \pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \theta & = & \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), & \text{sen}(\theta) & = & \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{array}$$

2.4.1 Exercícios Propostos

EP 2.6. Determinar as coordenadas cartesianas do ponto P cujas coordenadas polares são:

(a) $\left(2, \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$; (b) $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$.

EP 2.7. Quais as coordenadas polares do ponto $P(3, -\sqrt{3})$ do sistema de coordenadas cartesianas?

EP 2.8. Determinar a equação polar do lugar geométrico cuja equação retangular é:

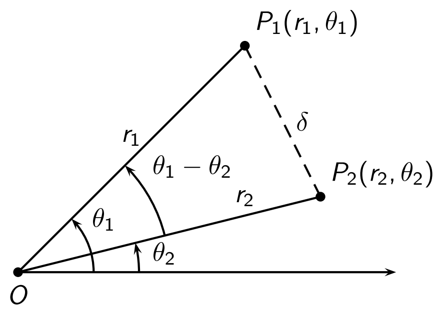
(a) $y = 1 - 2x$; (b) $x^2 - y - 8x + 1 = 0$; (c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

EP 2.9. Determinar a equação retangular do lugar geométrico cuja equação polar é:

(a) $2 = r\cos(\theta)$; (b) $r(1 + \cos(\theta)) = 2$; (c) $r = 5$.

2.5 Distância entre Dois Pontos em Coordenadas Polares

Sejam $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ dois pontos do plano expresso em coordenadas polares. Observe, na figura ao lado, que a distância entre eles é conseqüência imediata da lei dos cossenos. De fato, no triângulo $\triangle OP_1P_2$, temos que



$$\begin{aligned} \delta^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ &\Leftrightarrow \\ d(P_1,P_2) &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}. \end{aligned}$$

2.5.1 Exercício Proposto

EP 2.10. Classifique, quanto aos lados, o triângulo de vértices $P_1\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(7, \frac{\pi}{3}\right)$ e $P_3\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.6 Equação Polar

Uma *equação polar* é qualquer equação do tipo

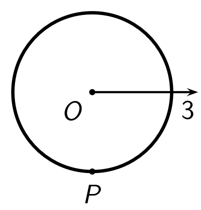
$$f(r,\theta) = 0. \tag{2.26}$$

A relação dada em (2.26) representa um lugar geométrico. Veremos, por exemplo, que $C : r = 3$ é a equação que descreve uma circunferência de centro no pólo e raio 3 u. Observe que o ponto $P\left(-3, \frac{\pi}{2}\right) \in C$, pois, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ satisfaz a equação de C. Assim, vemos que é possível termos um ponto que pertença ao lugar geométrico definido por $f(r,\theta) = 0$ sem que esta igualdade seja verificada. Além disso, equações polares distintas podem representar o mesmo lugar geométrico como, por exemplo, $r = 3$ e $r = -3$.

2.1 Definição. Duas equações polares $f(r,\theta) = 0$ e $g(r,\theta) = 0$ são equivalentes se representam o mesmo lugar geométrico.

Temos ainda que equações equivalentes se classificam em triviais e não triviais, respectivamente, equações equivalentes que possuem ou não o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, as equações $C_1 : r = 3$ e $C_2 : 2r = 6$ representam uma circunferência de centro no pólo e raio 3 e apresentam o mesmo conjunto solução ($S = \{(3,\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$), portanto, são equações equivalentes triviais. Já as equações polares $C_1 : r = 3$ e $C_2 : r = -3$ representam também uma circunferência de centro no pólo e raio 3, porém, não apresentam o mesmo conjunto solução ($S_1 = \{(3,\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ e $S_2 = \{(-3,\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$), portanto, são equações equivalentes não triviais.



2.7 Conjunto Abrangente

2.2 Definição. Abrangente é o conjunto de todas as equações equivalentes a de uma curva $C : f(r,\theta) = 0$.

2.3 Teorema. Seja C uma curva definida pela equação $f(r,\theta) = 0$. Então as equações polares da forma $f[(-1)^k \cdot r, \theta + k\pi] = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, são equivalentes à equação $f(r,\theta) = 0$.

A prova deste teorema é direta e é deixada para o leitor.

Desta forma, se C uma curva definida pela equação $f(r,\theta) = 0$, o *conjunto abrangente* da curva C associada à equação $f(r,\theta) = 0$ ou o conjunto abrangente da curva $C : f(r,\theta) = 0$, é dado por

$$E(C) = \{f[(-1)^k \cdot r, \theta + k\pi)] = 0; \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.27}$$

Uma equação polar é chamada de *abrangente* se o seu conjunto abrangente é unitário.

Nota 1.

1. Se um ponto, diferente do pólo, pertence a uma curva C, então todo par de coordenadas polares de P satisfaz a pelo menos uma equação do conjunto abrangente da curva C. Em outras palavras, $E(C)$ é abrangente se qualquer um dos pontos de C, distinto do pólo, satisfaz a uma das equações de $E(C)$.

2. O pólo pertence a uma curva C, definida pela equação $f(r,\theta) = 0$ se, e somente se, a equação em θ, $f(0,\theta) = 0$, possuir conjunto solução nos reais não vazio.

Exemplo 2.1. Determine um conjunto abrangente para as seguintes curvas: $C_1 : r = 2$ e $C_2 : r{\cdot}\cos(\theta) = 2$.

Solução: (a) $f(r,\theta) = r - 2 = 0$. Portanto, $f[(-1)^k \cdot r, \theta + k\pi) = (-1)^k \cdot r - 2 = 0$. Se k é par, ou seja, $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$, temos que $(-1)^{2n} \cdot r - 2 = 0$. Assim, $r = 2$. Para k ímpar ($k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$) temos que $(-1)^{2n+1} \cdot r - 2 = 0$. Assim, $r = -2$. Logo, $E(C_1) = \{r = -2, r = 2\}$.

(b) $f(r,\theta) = r \cdot \cos(\theta) - 2 = 0$. Portanto, $f[(-1)^k \cdot r, \theta + k\pi) = (-1)^k \cdot r \cdot \cos(\theta + k\pi) - 2 = 0$. Observemos a tabela ao lado:

	$k = 2n$	$k = 2n+1$
$(-1)^k \cdot r$	r	$-r$
$\cos(\theta + k\pi)$	$\cos(\theta)$	$-\cos(\theta)$

Segue que, $E(C_2) = \{r\cos(\theta) = 2\}$.

2.7.1 Exercícios Propostos

EP 2.11. Mostre que a equação $C : r^2 = a\cos(2\theta), a \in \mathbb{R}^*$, é abrangente.

EP 2.12. Verifique, em cada item, se o ponto P pertence à curva C:

(a) $P(4,\pi)$ e $C : r(1 + 2\cos(\theta)) = 4$;

(b) P é o pólo e $C : r^2 = 3 - 2\cos(\theta)$;

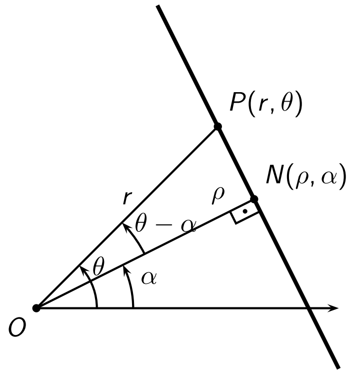
(c) P é o pólo e $C : r = 2 - 3\,\text{sen}(2\theta)$;

(d) $P\left(-2, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ e $C : r^2 + 4\,\text{sen}(\theta) = 0$.

2.8 Equação Polar da Reta

A necessidade de trabalharmos com equações polares de retas, apesar da simplicidade das equações destas na forma cartesiana, é evidente quando esta está associada a problemas com outras curvas na forma polar. Por exemplo, a interseção de curvas. A obtenção das equações polares das retas será feita de duas formas distintas. Primeiro, obteremos a equação polar da reta que não passa pelo pólo e, por fim, a que passa pelo pólo.

2.8.1 Equação Polar da Reta que não Passa pelo Pólo



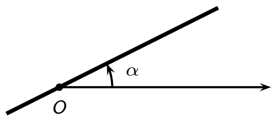
Consideremos inicialmente uma reta ℓ que não passa pela pólo e tomemos os pontos $P(r,\theta)$ qualquer e $N(\rho,\alpha)$ de modo que o triângulo ONP seja retângulo em N. Portanto,

$$\cos(\theta-\alpha)=\frac{\rho}{r}\Rightarrow \rho=r\cos(\theta-\alpha). \tag{2.28}$$

Aplicando-se, na equação (2.28), o cosseno da diferença podemos obter a equação geral da reta em coordenadas retangulares

$$x\cos(\alpha)+y\ \operatorname{sen}(\alpha)-\rho=0. \tag{2.29}$$

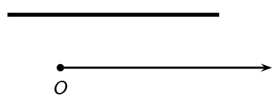
2.8.2 Equação Polar da Reta que Passa pelo Pólo



A reta que passa pelo pólo é o lugar geométrico dos pontos $P(r,\theta)$ cujo ângulo vetorial θ será constante, ou seja, $\theta=\alpha$, ou ainda, $\theta=\alpha+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.8.3 Caso Particulares de Retas

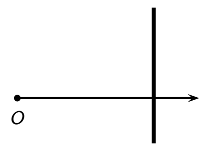
Reta Paralela ao Eixo Polar



Uma reta paralela ao eixo polar possui ângulo vetorial côngruo a $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Assim,

$$\rho=r\ \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}-k\pi\right)=r\ \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=r\ \operatorname{sen}(\theta).$$

Reta Perpendicular ao Eixo Polar



Uma reta perpendicular ao eixo polar possui o ângulo vetorial côngruo a $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Portanto,

$$\rho=r\ \cos\left(\theta-k\pi\right)=r\ \cos(\theta).$$

Assim, podemos apresentar o seguinte teorema que abrange as equação polares das retas.

2.4 Teorema. Seja (ρ,α) o conjunto principal de coordenadas polares do pé da normal traçada desde o pólo a qualquer reta no plano polar. A equação polar da reta é dada por $\rho=r\cos(\theta-\alpha)$. Se a reta passa pelo pólo, então sua representação é dada apenas pelo ângulo θ, $0\leq\theta<\pi$. Se a reta é paralela ao eixo a 90° e sua distância ao pólo for ρ unidades teremos $r\cos(\theta)=\pm\rho$. Se a reta é paralela ao eixo polar e sua distância ao pólo for ρ unidades teremos $r\operatorname{sen}(\theta)=\pm\rho$.

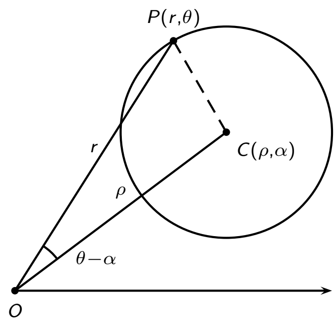
2.8.4 Exercícios Propostos

EP 2.13. Transforme as equações das retas, dadas em sua forma polar, em sua forma retangular.

(a) $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{4}\cos(\theta)+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}(\theta)$; (b) $\dfrac{1}{r}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(\theta)$. (c) $2=r\operatorname{sen}(\theta)$ (d) $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

EP 2.14. Determine a equação polar da reta que passa por $P\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$ e é perpendicular ao raio vetor de P.

2.9 Equação Polar da Circunferência



Como a circunferência é o lugar geométrico dos pontos $P(r,\theta)$ que equidistam de um ponto fixo $C(\rho,\alpha)$, temos: $d(C,P)=R$. Desenvolvendo-se esta igualdade obtemos:

$r^2-2\rho r\cdot\cos(\theta-\alpha)+\rho^2-R^2=0$ (Equação polar da circunferência).

Ao desenvolvermos $\cos(\theta-\alpha)$, obtemos:

$$r^2-2\rho\cos(\alpha)r\cos(\theta)-2\rho\,\text{sen}(\alpha)r\,\text{sen}(\theta)+\rho^2-R^2=0.$$

2.9.1 Exercício Proposto

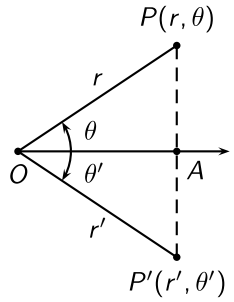
EP 2.15. Qual a medida do raio e as coordenadas do centro da circunferência $r^2-4r\cos\left(\theta-\dfrac{5\pi}{6}\right)=5$?

2.10 Simetrias

Dois pontos P e P' são *simétricos* em relação a um conjunto K se a distância entre K e os pontos P e P' são iguais. Dentre as simetrias existentes, destacamos as simetrias central e axial, onde os conjuntos K são um ponto e uma reta, respectivamente.

2.10.1 Simetria em Relação ao Eixo Polar

Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao eixo polar é o ponto $P'(r',\theta')$ se, e somente se,



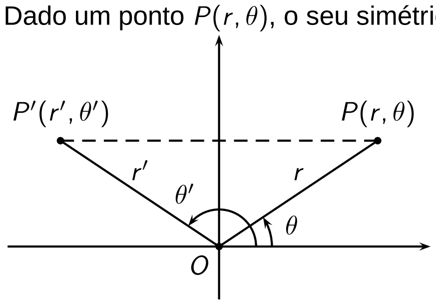
$$r'\cdot r>0 \quad \text{e} \quad \theta'+\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$
ou
$$r'\cdot r<0 \quad \text{e} \quad \theta'+\theta=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Geralmente, podemos nos limitar a trabalhar com:

(r,θ) é simétrico a $(r,-\theta)$ ou a $(-r,\pi-\theta)$.

2.10.2 Simetria em Relação ao Eixo a $\dfrac{\pi}{2}$rad

Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao eixo $\dfrac{\pi}{2}$rad é o ponto $P'(r',\theta')$ se, e somente se,



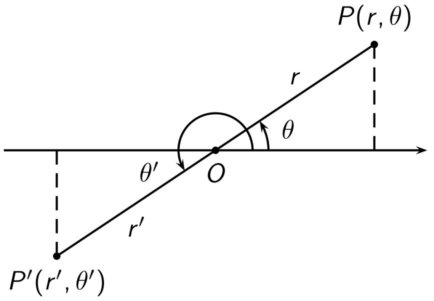
$$r'\cdot r>0 \quad \text{e} \quad \theta'+\theta=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$
ou
$$r'\cdot r<0 \quad \text{e} \quad \theta'+\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Geralmente, podemos nos limitar a trabalhar com:

(r,θ) é simétrico a $(-r,-\theta)$ou a $(r,\pi-\theta)$.

2.10.3 Simetria em Relação ao Pólo

Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao polo é o ponto $P'(r',\theta')$ se, e somente se,



$$\begin{array}{c} r'\cdot r>0 \quad \text{e} \quad \theta'-\theta=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}, \\ \text{ou} \\ r'\cdot r<0 \quad \text{e} \quad \theta'-\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}$$

Geralmente, podemos nos limitar a trabalhar com:

(r,θ) é simétrico a $(r,\pi+\theta)$ ou a $(-r,\theta)$.

Exemplo 2.2. Determine as coordenadas polares dos pontos P' simétricos de $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ em relação ao eixo polar, ao eixo a $90°$ pólo e ao pólo, respectivamente.

Solução: Simetria em relação: (a) ao eixo polar ($\theta\to-\theta$): $P'\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$; (b) ao eixo a $90°$ ($r\to-r$ e $\theta\to-\theta$): $P'\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$; (c) ao pólo ($r\to-r$): $P'\left(-2,\frac{\pi}{3}\right)$.

2.10.4 Curvas Simétricas em Relação a um Eixo ou a um Ponto

2.5 Definição. Uma curva C' é simétrica de outra C em relação ao eixo a (ou em relação ao ponto O), se para todo ponto $P\in C$, existe um ponto $P'\in C'$ simétrico em relação ao eixo a (ou em relação ao ponto O). Claramente, C é simétrica de C'.

A partir desta definição, podemos estabelecer a equação polar de uma curva C' simétrica C em relação a um eixo a (ou em relação ao ponto O).

Sejam $P(r,\theta)$ um ponto da curva C de equação polar $f(r,\theta)=0$ e $P'(r',\theta')$ o ponto de C' simétrico de P em relação ao eixo a (ou em relação ao ponto O). Podemos então estabelecer as relações de transformações entre coordenadas de P e P'.

$$\begin{cases} r &= g(r') \\ \theta &= h(\theta') \end{cases}$$

Utilizando-se estas igualdades obtemos: $f(g(r'),h(\theta'))=0$, que é uma equação polar que relaciona as coordenadas de P'. Logo, é uma equação da curva C'.

Exemplo 2.3. Determine a equação da curva simétrica de $C: r=3\operatorname{sen}(2\theta)$, em relação:

(a) ao eixo polar; (b) ao eixo à $90°$; (c) ao pólo.

Solução: Façamos:

(a) $r=r'$ e $\theta=-\theta'$. Logo, $C': r'=3\operatorname{sen}(2(-\theta'))\Leftrightarrow C': r'=-3\operatorname{sen}(2\theta')$.

(b) $r=-r'$ e $\theta=-\theta'$. Logo, $C': -r'=3\operatorname{sen}(2(-\theta'))\Leftrightarrow C': -r'=-3\operatorname{sen}(2\theta')\Leftrightarrow C': r'=3\operatorname{sen}(2\theta')$.

(c) $r=-r'$ e $\theta=\theta'$. Logo, $C': -r'=3\operatorname{sen}(2\theta')\Leftrightarrow C': r'=-3\operatorname{sen}(2\theta')$.

Quando a curva C', simétrica de C em relação ao eixo a (ou ao ponto O), coincide com ela própria (a curva simétrica de C é C), dizemos que a curva C é simétrica em relação a a (ou em relação a O).

No exemplo anterior, podemos concluir que C é simétrica em relação ao eixo à $90°$. No entanto, mesmo sendo as equações dos ítens (a) e (c) diferentes da equação de C, temos que averiguar se estas equações são equivalentes à equação de C. Para isso, vamos determinar um conjunto abrangente de C.

	$k = 2n$	$k = 2n + 1$
$(-1)^k \cdot r$	r	$-r$
$\text{sen}(2(\theta + k\pi))$	$\text{sen}(2\theta)$	$\text{sen}(2\theta)$

$$\Rightarrow \qquad E(C) = \{r = 3\,\text{sen}(2\theta), r = -3\,\text{sen}(2\theta)\}.$$

Podemos, portanto, concluir que a curva C é também simétrica em relação ao eixo polar e ao pólo.

2.11 Traçado de Curvas em Coordenadas Polares

O processo de construção de curvas em coordenadas polares consiste das seguintes etapas:

1. Determinar as interseções com o eixo polar e o eixo a $90°$:

   — Eixo polar: fazemos $\theta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$;

   — Eixo a $90°$: fazemos $\theta = n\dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ e ímpar;

   — Pólo: fazemos $r = 0$ na equação da curva para obter θ.

2. Determinar a simetria do lugar geométrico

   — Uma curva é simétrica em relação ao eixo polar se obtemos uma equação equivalente à curva dada, por pelo menos uma das seguintes substituições:

   ⋄ θ por $-\theta$ ou, ainda, $-\theta$ por $\pi - \theta$ e r por $-r$;

   — Uma curva é simétrica em relação ao a $90°$ se obtemos uma equação equivalente à curva dada, por pelo menos uma das seguintes substituições:

   ⋄ θ por $\pi - \theta$ ou, ainda, θ por $-\theta$ e r por $-r$;

   — Uma curva é simétrica em relação ao pólo se obtemos uma equação equivalente à curva dada, por pelo menos uma das seguintes substituições:

   ⋄ θ por $\pi + \theta$ ou, ainda, r por $-r$.

3. A extensão do lugar geométrico: estudamos aqui o intervalo de variação de r na equação dada.

4. O cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos a fim de se obter um gráfico adequado.

5. O desenho do lugar geométrico.

6. Transformar a equação dada em sua forma polar em sua forma retangular.

Exemplo 2.4. Traçar o gráfico da curva $C : r = 1 + 2\cos(\theta)$.

Solução:

1. Interseções com o eixo polar e o eixo a $90°$;

Eixo polar: fazemos $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$: $r = 1 + 2\cos(n\pi)$

n	$\theta = n\pi$	r	(r, θ)
0	0	$1 + 2\cos(0) = 3$	$(3, 0)$
1	π	$1 + 2\cos(\pi) = -1$	$(-1, \pi)$
2	2π	$1 + 2\cos(2\pi) = 3$	$(3, 2\pi)$

– Eixo a 90°: fazemos $\theta = n\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ e ímpar;

n	$\theta = n\dfrac{\pi}{2}$	r	(r, θ)
1	$\dfrac{\pi}{2}$	$1 = 1$	$\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$
3	$3\dfrac{\pi}{2}$	$1 = 1$	$\left(1, 3\dfrac{\pi}{2}\right)$
5	$5\dfrac{\pi}{2}$	$1 = 1$	$\left(1, 5\dfrac{\pi}{2}\right)$

Perceba que o processo de substituição é finito, uma vez que os pares $(3, 0)$ e $(3, 2\pi)$ (no primeiro caso) representam, no sistema de coordenadas polares, o mesmo ponto, e os pares $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\left(1, 5\dfrac{\pi}{2}\right)$ (no segundo) representam o mesmo ponto.

– Pólo: fazemos $r = 0$ na equação da curva para obter θ.

$$0 = 1 + 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Determinar a simetria do lugar geométrico:

– Simetria em relação ao eixo polar:

substituamos θ por $-\theta$:

$$r = 1 + 2\cos(-\theta) \Leftrightarrow r = 1 + 2\cos(\theta).$$

Como a equação obtida é equivalente à da curva C, a curva é simétrica em relação ao eixo polar.

– Simetria em relação ao eixo a noventa:

substituamos θ por $-\theta$ e r por $-r$;

$$-r = 1 + 2\cos(-\theta) \Leftrightarrow r = -1 - 2\cos(\theta).$$

Como a equação obtida não é equivalente à da curva C, não existe simetria em relação ao eixo a noventa.

– Simetria em relação ao pólo:

substituamos r por $-r$;

$$-r = 1 + 2\cos(\theta) \Leftrightarrow r = -1 - 2\cos(\theta).$$

Novamente, a equação obtida não é equivalente à da curva C. Portanto, não existe simetria em relação ao pólo.

3. A extensão do lugar geométrico:

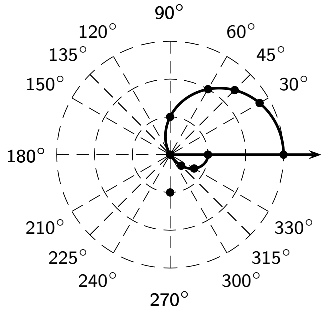
$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\cos(\theta) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2\cos(\theta) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq r \leq 3$$

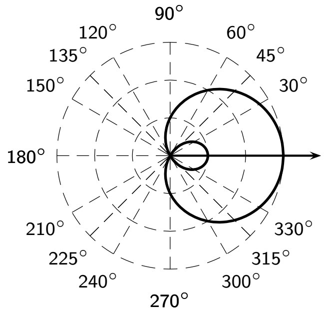
Logo, a curva C possui extensão limitada.

4. O cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos a fim de se obter um gráfico adequado:

5. Marcação dos pontos no sistema de coordenadas polares:

θ	r
$\dfrac{\pi}{6}$	$1+2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$
$\dfrac{\pi}{4}$	$1+2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$
$\dfrac{\pi}{3}$	$1+2\dfrac{1}{2}=2$
$\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$	$1-2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}$
$\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$	$1-2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$
$\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$	$1-2\dfrac{1}{2}=0$





6. Transformar a equação dada em sua forma polar em sua forma retangular:

$$r=1+2\cos(\theta)\Leftrightarrow r^2=r+2r\cos(\theta)\Leftrightarrow r^2-2r\cos(\theta)=r\Leftrightarrow (r^2-2r\cos(\theta))^2=r^2\Leftrightarrow (x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2$$

2.11.1 Exercícios Propostos

EP 2.16. Traçar o gráfico da curva $C: r=2(1-\cos\theta)$.

EP 2.17. Traçar o gráfico da curva $C: r=1-2\,\text{sen}\,\theta$.

EP 2.18. Traçar o gráfico da curva $C: r=2\cos(2\theta)$.

2.12 Curvas Notáveis em Coordenadas Polares

Podemos facilmente traçar e identificar, em coordenadas polares, o gráfico das limaçons, das rosáceas, das lemniscatas e das Espirais de Arquimedes, as quais chamaremos de curvas notáveis. Este tratamento é feito pelo reconhecimento de uma equação polar característica ou pelo gráfico da curva no plano polar.

2.12.1 Limaçons

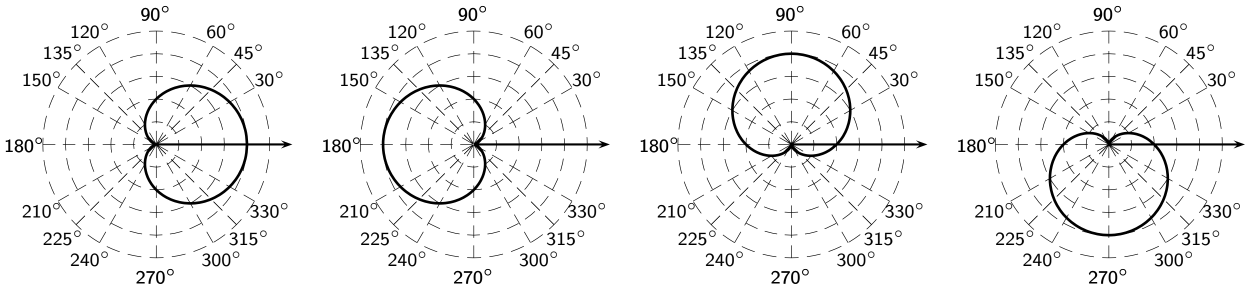
São três os tipos de limaçons: as cardióides, as limaçons sem laço e as com laço. Suas equações polares, com $a\in\mathbb{R}^*$ e $b\in\mathbb{R}^*_+$, duas constantes reais não-nulas, restringem-se a:

$$r = a\pm b\cdot\cos(\theta), \qquad (2.30) \qquad\qquad r = a\pm b\cdot\text{sen}(\theta) \qquad (2.31)$$

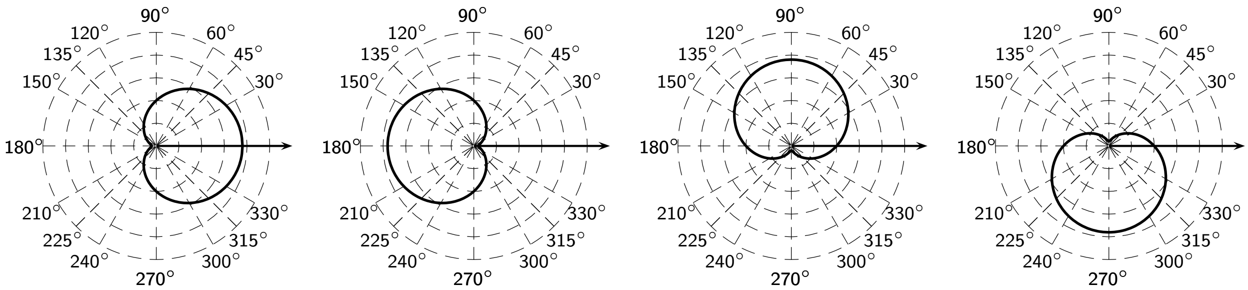
Observem que em (2.30) existe simetria em relação ao eixo polar, enquanto que em (2.31) a simetria se dá em relação ao eixo a $90°$.

Para traçarmos rapidamente o gráfico de uma limaçon é suficiente determinarmos as intersecções com os eixos polar e a 90° e com o pólo, caso exista, e identificarmos a curva mediante a seguinte classificação:

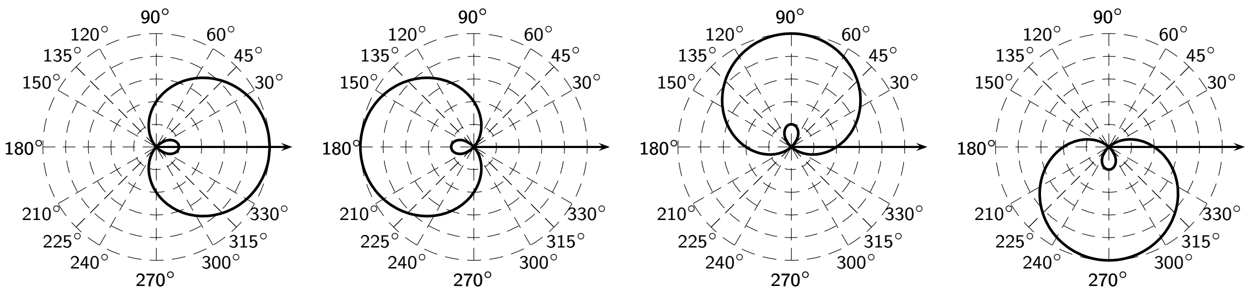
Cardióide ($|a| = b$)



Limaçon sem Laço ($|a| > b$)



Limaçon com Laço ($|a| < b$)



2.12.2 Rosáceas

A equação polar das rosáceas é:

$$r = a \cdot \cos(n\theta) \qquad (2.32) \qquad\qquad r = a \cdot \text{sen}(n\theta), \qquad (2.33)$$

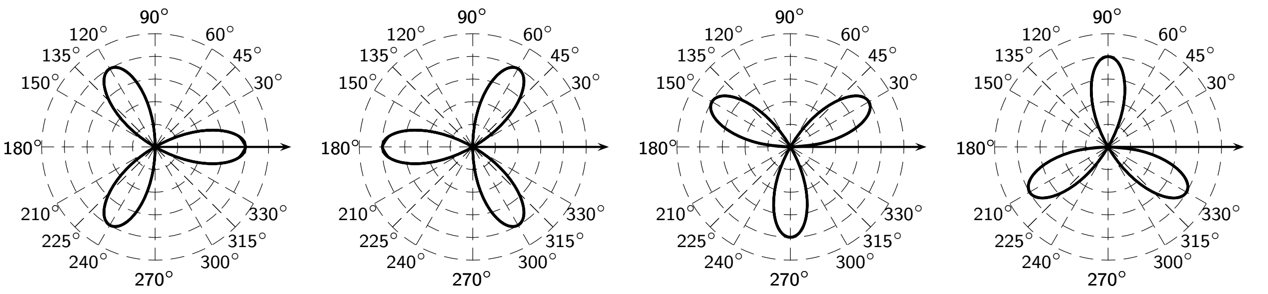
com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

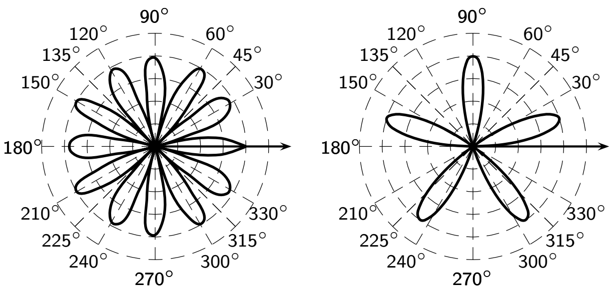
A quantidade de pétalas é obtida do seguinte fato:

– Se n é par, o número de pétalas da rosácea é dado por: $2 \cdot n$;

– Se n é ímpar, o número de pétalas da rosácea é dado por: n.

O ângulo entre dois eixos de simetria entre duas pétalas consecutivas é dado por $\frac{2\pi}{p}$, onde p é o número de pétalas.

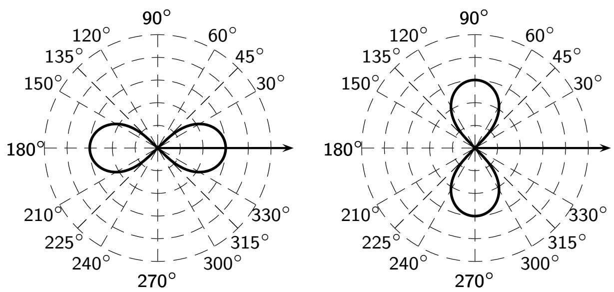




Para o traçado rápido de uma rosácea é suficiente determinarmos a extensão do lugar geométrico (a), a quantidade de pétalas e o espaçamento entre elas e a primeira pétala que será construída sobre o eixo de simetria $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2n}$ caso as equações sejam, respectivamente, $r = a\cos(n\theta)$ ou $r = a\,\text{sen}(n\theta)$.

2.12.3 Lemniscatas

São curvas cuja equação é do tipo $r^2 = a\cos(2\theta)$ ou $r^2 = a\,\text{sen}(2\theta)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Devemos observar que se a é positivo, tanto $\cos(2\theta)$ quanto $\text{sen}(2\theta)$ são positivos, e se a é negativo, tanto $\cos(2\theta)$ quanto $\text{sen}(2\theta)$ são negativos, visto que $r^2 > 0$.



Para o traçado rápido da lemniscata é suficiente determinarmos a sua extensão ($\sqrt{|a|}$) e encontrarmos os valores de θ para os quais $r = \sqrt{|a|}$.

2.12.4 Espiral de Arquimedes

2.6 Definição. São curvas cuja equação é do tipo

$$r = a\theta, a \in \mathbb{R}^*. \tag{2.34}$$

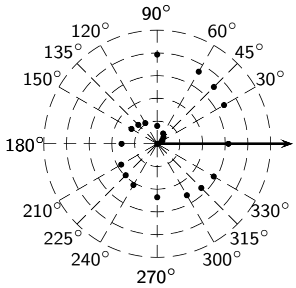
Para o traçado rápido da Espiral de Arquimedes, verifiquemos que a curva de equação (2.34):

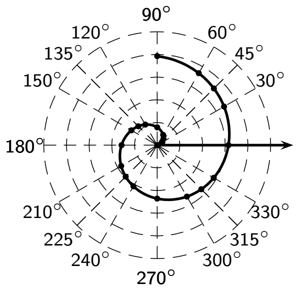
1. Passa pelo pólo. De fato, para $r = 0$, em (2.34), temos $\theta = 0$.
2. É simetria em relação ao eixo à noventa. Esta afirmação se deve ao fato de que, o conjunto de pontos simétricos a (r, θ) satisfaz a mesma equação. De fato, $-r = a \cdot (-\theta)$ equivale a $r = a \cdot \theta$. De forma análoga, verifica-se que não existe simetria tanto em relação ao eixo polar quanto em relação ao pólo.
3. Possui extensão ilimitada, pois, não existe um círculo tal que todos os pontos da Espiral sejam pontos interiores.

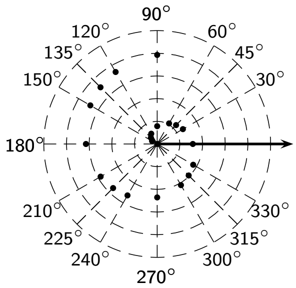
Gráfico da Espiral de Arquimedes

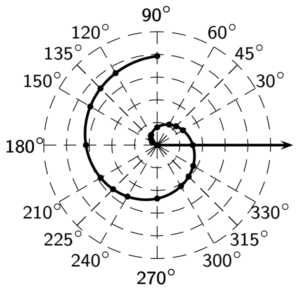
Para o traçado rápido da Espiral de Arquimedes é suficiente atribuir valores a θ e encontrar o valor de r, marcando-se estes pontos. Por exemplo, considere a Espiral de Arquimedes de equação $r = \frac{1}{2} \cdot \theta$. Atribuindo-se alguns valores a θ, encontramos os respectivos valores de r (veja a tabela).

θ		r
Graus	rad	
0	0	0
30	$\frac{\pi}{6}$	0, 261799388
45	$\frac{\pi}{4}$	0, 392699082
60	$\frac{\pi}{3}$	0, 523598776
90	$\frac{\pi}{2}$	0, 785398163
120	$\frac{2\pi}{3}$	1, 047197551
135	$\frac{3\pi}{4}$	1, 178097245
150	$\frac{5\pi}{6}$	1, 308996939
180	π	1, 570796327
210	$\frac{7\pi}{6}$	1, 832595715
225	$\frac{5\pi}{4}$	1, 963495408
240	$\frac{4\pi}{3}$	2, 094395102
270	$\frac{3\pi}{2}$	2, 356194490
300	$\frac{5\pi}{3}$	2, 617993878
315	$\frac{7\pi}{4}$	2, 748893572
330	$\frac{11\pi}{6}$	2, 879793266
360	2π	3, 141592654
390	$\frac{13\pi}{6}$	3, 403392041
405	$\frac{9\pi}{4}$	3, 534291735
420	$\frac{7\pi}{3}$	3, 665191429
450	$\frac{5\pi}{2}$	3, 926990817





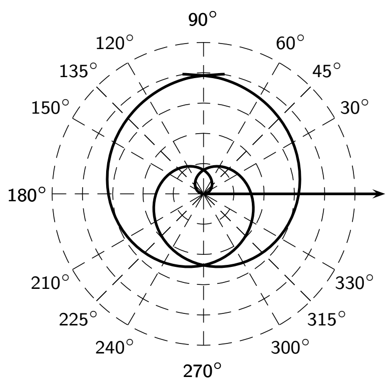




θ		r
Graus	rad	
0	0	0
-30	$-\frac{\pi}{6}$	$-0, 261799388$
-45	$-\frac{\pi}{4}$	$-0, 392699082$
-60	$-\frac{\pi}{3}$	$-0, 523598776$
-90	$-\frac{\pi}{2}$	$-0, 785398163$
-120	$-\frac{2\pi}{3}$	$-1, 047197551$
-135	$-\frac{3\pi}{4}$	$-1, 178097245$
-150	$-\frac{5\pi}{6}$	$-1, 308996939$
-180	$-\pi$	$-1, 570796327$
-210	$-\frac{7\pi}{6}$	$-1, 832595715$
-225	$-\frac{5\pi}{4}$	$-1, 963495408$
-240	$-\frac{4\pi}{3}$	$-2, 094395102$
-270	$-\frac{3\pi}{2}$	$-2, 356194490$
-300	$-\frac{5\pi}{3}$	$-2, 617993878$
-315	$-\frac{7\pi}{4}$	$-2, 748893572$
-330	$-\frac{11\pi}{6}$	$-2, 879793266$
-360	-2π	$-3, 141592654$
-390	$-\frac{13\pi}{6}$	$-3, 403392041$
-405	$-\frac{9\pi}{4}$	$-3, 534291735$
-420	$-\frac{7\pi}{3}$	$-3, 665191429$
-450	$-\frac{5\pi}{2}$	$-3, 926990817$

Nota 2.

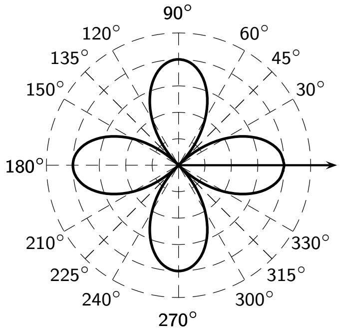
Observe que, ao atribuirmos valores a θ não negativos, a espiral girou no sentido anti-horário. No caso contrário, o giro se deu no sentido horário. Portanto, podemos concluir que o gráfico de uma Espiral de Arquimedes é:



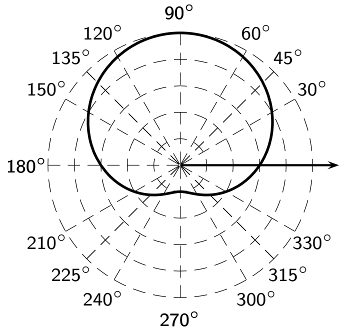
2.12.5 Exercícios Propostos

EP 2.19. Determine a equação da curva cujos gráficos se encontram a seguir:

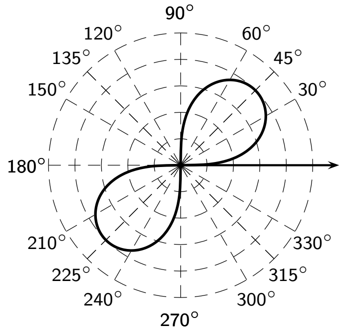
(a)



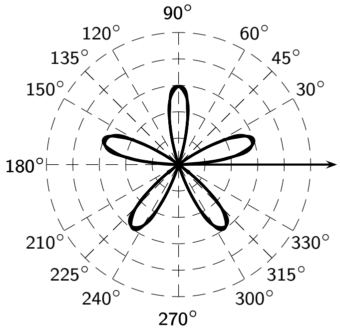
(b)



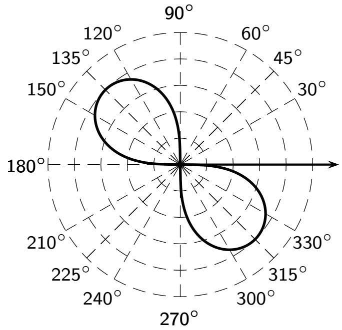
(c)



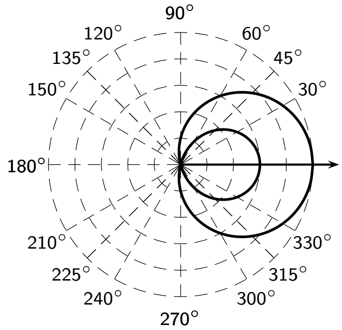
(d)



(e)



(f)



EP 2.20. Considere as curvas $C_1 : r = 3[1 - 2\cos(\theta)]$, $C_2 : r^2 = -4\,\text{sen}(2\theta)$ e $C_3 : r = 4\cos(3\theta)$. Marque V se verdadeiro ou F se falso para as afirmativas a seguir:

(a) ( ) A curva C_3 e é simétrica em relação ao eixo polar;

(b) ( ) A curva C_2 é uma lemniscata de extensão máxima igual a 4;

(c) ( ) A curva C_1 é uma limaçon com laço;

(d) ( ) A curva C_1 contém o pólo;

(e) ( ) A curva C_3 é uma rosácea de 3 pétalas e é simétrica em relação ao pólo.

EP 2.21. Esboce o gráfico das curvas dadas a seguir:

(a) $r = \text{sen}(4\theta)$
(b) $r = \cos(5\theta)$
(c) $r = \cos(4\theta)$
(d) $r = \text{sen}(5\theta)$
(e) $r^2 = -\cos(2\theta)$
(f) $r^2 = \text{sen}(2\theta)$

2.13 Interseção de Curvas em Coordenadas Polares

Muitos problemas em Matemática que apresentam uma solução recaem em um sistema de n equações com n incógnitas. Esta solução geometricamente significa o ponto de interseção das n curvas que cada equação do sistema representa.

Em coordenadas cartesianas, a solução de um sistema é facilmente encontrado, principalmente quando as equações que o constituíam eram relativamente simples. Em coordenadas polares, devemos ter um pouco mais de cuidado! Um ponto do plano possui um número infinito de pares que o localiza. Sendo assim, pode acontecer que um ponto de interseção entre duas curvas, satisfaça uma equação com um par de coordenadas e a uma outra com um outro par de coordenadas. Conseqüentemente, nenhum desses pares será uma solução para o sistema formado pelas equações das curvas envolvidas, ou seja, as coordenadas do ponto de interseção das curvas devem satisfazer a todas as equações do sistema.

Este problema é facilmente contornado se utilizarmos as equações dos conjuntos abrangentes das curvas para formar todos os outros possíveis sistemas através de uma combinação destas equações. As soluções encontradas constituem as coordenadas polares de todos os pontos de interseção das curvas, exceto, possivelmente, o pólo. Devemos ainda verificar se cada uma dessas curvas passa pelo pólo, determinando-se, por fim, o conjunto de pontos de interseção.

O fato de conhecermos as curvas e suas propriedades poderá nos fornecer dados que, na maioria das vezes, reduzem a necessidade da resolução de todos os sistemas que podem ser formados com as equações dos conjuntos abrangentes das curvas envolvidas.

Nota 3 (Resumindo)**.** Dada as curvas $C_1 : f(r, \theta) = 0$ e $C_2 : g(r, \theta) = 0$ podemos obter os pontos de interseção se

1. Determinamos o conjunto abrangente de uma das curvas;
2. Resolvemos todos os sistemas formados por uma das equações fixadas e cada uma das equações do conjunto abrangente;
3. Verificamos se o pólo está na interseção.

Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 2.5. Determine o conjunto dos pontos de interseção das curvas dadas a seguir:

(a) $C_1 : r = 4\cos(2\theta)$ e $C_2 : r = 2$;

(b) $C_3 : 4 - 6\,\mathrm{sen}(2\theta)$ e $C_4 : \theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

Solução: (a) Consideremos os conjuntos $E(C_1) = \{r = 4\cos(2\theta), r = -4\cos(2\theta)\}$ e $E(C_2) = \{r = 2, r = -2\}$, abrangentes de C_1 e de C_2, respectivamente. Os possíveis sistemas de equações e suas soluções são:

$$S_1 : \begin{cases} r &= 4\cos(2\theta) \\ r &= 2 \end{cases}$$

Por substituição, $4\cos(2\theta) = 2$, ou seja, $\cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}$. Segue que, $2\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ou $2\theta = -\dfrac{\pi}{3}$, ou seja, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$. Logo, temos os pontos $P_1\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ e $P_2\left(2, -\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$$S_2 : \begin{cases} r &= 4\cos(2\theta) \\ r &= -2 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} r &= -4\cos(2\theta) \\ r &= 2 \end{cases} \quad S_4 : \begin{cases} r &= -4\cos(2\theta) \\ r &= -2 \end{cases}$$

De modo análogo, obtemos as soluções $P_3\left(-2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ e $P_4\left(-2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $P_5\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$ e $P_6\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ e $P_7\left(-2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ e $P_8\left(-2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ dos sistemas S_2, S_3 e S_4, respectivamente.

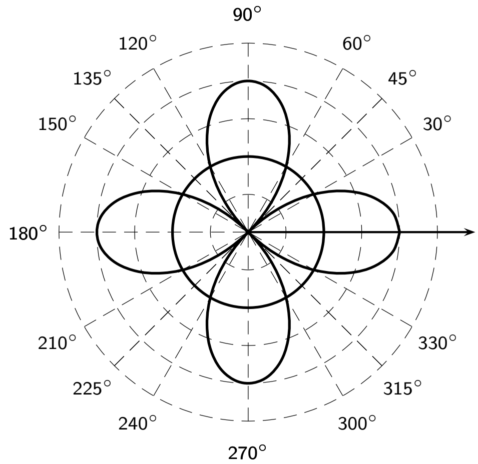
O pólo não pertence ao conjunto solução do sistema S, visto que a curva $C : r = 2$, não passa pelo pólo. Assim, o conjunto solução do sistema I é

$$I = \left\{P_1\left(2, \frac{\pi}{6}\right), P_2\left(2, -\frac{\pi}{6}\right), P_3\left(-2, \frac{\pi}{3}\right), P_4\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right), P_5\left(2, \frac{\pi}{3}\right), P_6\left(2, \frac{2\pi}{3}\right), P_7\left(-2, \frac{\pi}{6}\right), P_8\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)\right\}.$$

Nota 4.

Poderíamos obter o conjunto solução I resolvendo-se apenas um dos sistemas acima e utilizando-se o nosso conhecimentos sobre as curvas envolvidas. De fato, a curva C_1 é uma rosácea de quatro pétalas, cujo espaçamento entre as pétalas é dado por $\frac{\pi}{2}$ e com uma das extremidades no ponto $Q_1(4, 0)$. A curva C_2 é um círculo de centro no polo e raio 2.

Se, por exemplo, considerássemos os pontos obtidos no sistema S_1, os outros pontos seriam facilmente determinados utilizando-se as simetrias da rosácea e do Círculo.



(b) Consideremos os conjuntos abrangentes $E(C_3) = \{r = 4 - 6\,\text{sen}(\theta), r = -4 - 6\,\text{sen}(\theta)\}$ e $E(C_4) = \left\{\theta = \frac{-(1+6n)\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}\right\}$, respectivamente.

Aqui precisaremos de um pouco mais de cuidado, pois, $E(C_4)$ é um conjunto com infinitos elementos.

O procedimento usual é o de formar sistemas pela combinação de apenas uma equação do conjunto abrangente com infinitos elementos, com as equações do conjunto abrangente com finitos elementos, esboçando-se, também, as curvas envolvidas.

Temos, então, os seguintes sistemas:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & 4 - 6\,\text{sen}(\theta) \\ \theta & = & -\frac{\pi}{6} \end{array} \right. \quad S_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & -4 - 6\,\text{sen}(\theta) \\ \theta & = & -\frac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

Por substituição em S_1, $4 - 6\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 7$. Logo, temos $P_1\left(7, -\frac{\pi}{6}\right)$.

De modo análogo, resolvemos o sistema S_2: $-4 - 6\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$. Daí, $P_2\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$.

Para $r = 0$, verificamos que as equações em C_3 e C_4 estão satisfeitas.

O conjunto de pontos de interseção é, portanto, $I = \left\{P_1\left(7, -\frac{\pi}{6}\right), P_2\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

Exemplo 2.6. Determine as interseções entre as curvas $C_1 : r = 3$ e $C_2 : r = 6\cos(2\theta)$.

Solução: Fixemos a equação C_2 e determinemos o conjunto abrangente para C_1:

$$E(C_1) = \{(-1)^k \cdot r = 3; k \in \mathbb{Z}\} = \{-3, 3\}.$$

Devemos agora resolver os sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r & = & 3 \\ r & = & 6\cos(2\theta) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & -3 \\ r & = & 6\cos(2\theta) \end{array} \right.$$

Por substituição obtemos as equações $\cos(2\theta) = \frac{1}{2}$ e $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$. Sendo assim, temos que $2\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $2\theta = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Vamos atribuir alguns valores inteiros para determinar os pontos de interseção.

Para $n = 0$ achamos os pontos $P_1\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$, $P_3\left(-3, \frac{\pi}{3}\right)$ e $P_4\left(-3, -\frac{\pi}{3}\right)$.

Para $n = 1$ achamos os pontos $P_5\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$, $P_6\left(3, -\frac{5\pi}{3}\right)$, $P_7\left(-3, \frac{4\pi}{3}\right)$ e $P_8\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Para outros valores de n os pontos que serão obtidos se igualam a um dos P_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.

EP 2.22. Determine as interseções das curvas C_1 e C_2, analiticamente:

(a) $\begin{cases} C_1 : r &= 2(1 + \cos(\theta)) \\ C_2 : \theta &= \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

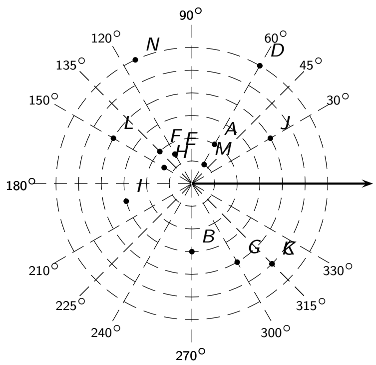
(b) $\begin{cases} C_1 : r &= 6\,\text{sen}(2\theta) \\ C_2 : r &= -3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} C_1 : r &= 2(1 - \cos(\theta)) \\ C_2 : r^2 &= 16\cos(2\theta) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} C_1 : r &= 4 - 2\,\text{sen}(\theta) \\ C_2 : r &= -2 + 2\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$

Gabarito

2.1



2.2 . 2.3 (b) $P_3(1, 120°)$, $P_3(1, 480°)$, $P3(-1, 300°)$, $P_4(\sqrt{2}, 45°)$, $P_4(-\sqrt{2}, -135°)$, $P_4(-\sqrt{2}, 225°)$ (c) $P_1\left(\frac{3}{2}, -3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $P_5(0, 0)$; $P_7(\cos 3\theta, \text{sen}\, 3\theta)$; (d) P_2. 2.4 . 2.5 . 2.6 . 2.7 $\{(2\sqrt{3}; 330°), (2\sqrt{3}; -30°), (-2\sqrt{3}; 150°), (-2\sqrt{3}; -210°)\}$. 2.8 . 2.9 (a) $x = 2$ (b) $y^2 = 4(1 - x)$ (c) $x^2 + y^2 = 25$. 2.10 . 2.11 . 2.12 . 2.13 . 2.14 . 2.15 . 2.16 . 2.17 . 2.18 . 2.19 (a) $r = 4\cos(2\theta)$ (b) $r = 3 + 2\,\text{sen}(\theta)$ (c) $r^2 = 16\,\text{sen}(2\theta)$ (d) $r = 3\,\text{sen}(5\theta)$ (e) $r^2 = -16\,\text{sen}(2\theta)$ (f) $r = 1 + 4\cos(\theta)$. 2.21 . 2.22 (a) $S = \{(0, 0), (2 + \sqrt{2}, \pi/4), (2 - \sqrt{2}, 5\pi/4)\}$ (b) $S = \{ (3, \pi/12), (3, 5\pi/12), (3, 13\pi/12), (3, 17\pi/12), (-3, 7\pi/12), (-3, 11\pi/12), (-3, 19\pi/12), (3, 23\pi/12)\}$ (c) $S = \{ (0, 0), (4, \pi), (4/7, \arccos(5/7)(I \text{ quadrante})), (4/7, -\arccos(5/7)(IV \text{ quadrante}))\}$ (d) $S = \{(-3, -11\pi/6), (-3, 7\pi/6)\}$.

bloco temático 2 Vetores, Retas, Planos e Superfícies

tema 3 Vetores, Retas e Planos

3.1 Vetores

Considere uma reta r e nela tomemos dois pontos não coincidentes A e B. A porção da reta limitada por estes pontos chamamos de *segmento de reta* AB. Dois segmentos de reta têm a mesma direção se, e somente se, estão sob a mesma reta suporte ou se estão em retas suportes paralelas. Ao segmento de reta AB podemos associar um sentido: de A para B, por exemplo. Denotaremos por $\overline{AB}$ o segmento de reta cuja orientação está associada ao sentido de A (origem) para B (extremidade). Ao segmento de reta orientado com origem e extremidade num mesmo ponto A denotaremos por segmento nulo $\overline{AA} = 0$.

Dois segmentos orientados não nulos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de mesmo módulo ($|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$), direção e sentido são ditos *equipolentes*, $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

3.1 Proposição. A equipolência é um a relação de equivalência, ou seja:

1. $\overline{AB} \sim \overline{AB}$; (reflexiva)
2. $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \sim \overline{AB}$; (simétrica)
3. $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ e $\overline{CD} \sim \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{EF}$. (transitiva)

A demonstração desta proposição será omitida pois é imediata.

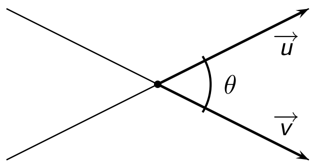
Nota 5.

- ◇ Dois segmentos de reta orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ equipolentes e não pertencentes à mesma reta formam, necessariamente, um paralelogramo $ABCD$.
- ◇ Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos de reta orientados se eles possuem a mesma direção.
- ◇ Dois segmentos de reta orientados opostos possuem sentidos contrários.

Todos os segmentos de reta equipolentes a um determinado segmento de reta orientado $\overline{AB}$ formam um conjunto chamado *classe de equipolência* de $\overline{AB}$.

Um vetor $\overrightarrow{v}$ é um representante de uma classe de equipolência num espaço euclidiano, ou seja, um vetor é um conjunto determinado por todos os segmentos de reta orientados equipolentes a um determinado segmento. Portanto, um vetor $\overrightarrow{v}$ é determinado por uma infinidade de segmentos de reta orientados, chamados representantes desse vetor, todos equipolentes entre si. Indicaremos o conjunto de todos os vetores por V^n, onde $n \in \mathbb{N}$ terá um significado que será visto posteriormente.

O *ângulo* entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não-nulos é o ângulo θ formado por suas retas suportes quando estes vetores estão unidos por suas origens.



Observe que, até aqui, não estamos interessados na orientação do ângulo (sentido horário ou anti-horário). Portanto, $0 \leq \theta \leq \pi$ (θ em radianos).

Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, não nulos, são *coplanares*, isto é, estão no mesmo plano, se possuem representantes em um mesmo plano, *paralelos* ($\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$) se seus representantes (segmentos de reta equipolentes) também o são e *perpendiculares* ($\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$) se estão no mesmo plano e o ângulo entre eles for de $90°$. Os vetores que formam ângulo reto, mas, não estão necessariamente no mesmo plano são *ortogonais*. O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é paralelo e ortogonal a qualquer vetor. O vetor $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, ou seja, possuem mesmo módulo, direção, porém, sentidos contrários.

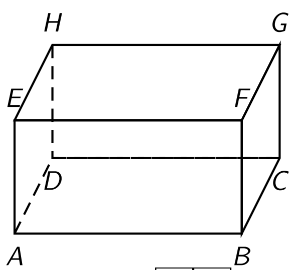
Observe que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, pois podemos sempre tomar um ponto no espaço e, com origem nele, imaginar dois outros representantes destes pertencendo a um plano que passa por este ponto. Entretanto, três vetores poderão ou não ser coplanares.

Restringiremos nosso estudo aos vetores do espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ que representam, respectivamente, o plano e o espaço.

Exemplo 3.1. Dado o paralelepípedo abaixo, podemos julgar, facilmente, em verdadeiro (V) ou falso (F) as seguintes sentenças, como faremos:

(a) (V) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$	(c) (V) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$	(e) (F) $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \lvert\overrightarrow{HF}\rvert$	(g) (F) $\overrightarrow{BG} // \overrightarrow{ED}$
(b) (F) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$	(d) (V) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$	(f) (V) $\lvert\overrightarrow{AG}\rvert = \lvert\overrightarrow{DF}\rvert$	(h) (V) $\overrightarrow{BF} // \overrightarrow{FB}$

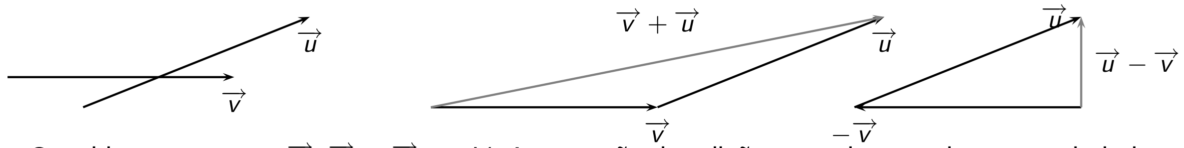
(i) (V) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{EG}$ são coplanares	(m) (F) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares
(j) (V) $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EG}$ e $\overrightarrow{HF}$ são coplanares	(n) (V) $\overrightarrow{AE}$ é ortogonal ao plano ABC
(k) (V) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{FG}$ são coplanares	(o) (V) $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao plano BCG
(l) (F) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares	(p) (V) $\overrightarrow{CD}$ é paralelo ao plano HEF



3.2 Tratamento Geométrico para Operações com Vetores

3.2.1 Adição entre Vetores

Considere dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ unidos de maneira que a origem de um deles coincide com a extremidade do outro. O vetor formado pela origem e extremidade não utilizadas nesta união e neste sentido, nos dará o vetor resultante da adição $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ (vetor soma). No caso da subtração ($\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$) utilizamos o mesmo processo da soma, porém, consideraremos o vetor oposto, ou seja, ($\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})$). Assim, a operação de subtração nada mais é do que uma adição com o vetor oposto.



Considere os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, e $\overrightarrow{w}$ em V. A operação de adição goza das seguintes propriedades:

1. **Comutativa**: $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$;
2. **Associativa**: $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$;
3. **Existência do elemento neutro**: $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$;
4. **Existência do elemento oposto**: $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$.

Exemplo 3.2. Com base na figura do exemplo 3.1, temos:

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AF}$

(b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BF}$

(c) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{BG}$

(d) $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}$

(e) $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DF}$

(f) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AF}$

(g) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$

(h) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{EH}$

(i) $\overrightarrow{fG}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AC}$

3.2.2 Produto entre um Vetor e um Escalar

Dado um vetor não nulo $\overrightarrow{u}$ e um escalar $\alpha\in\mathbb{R}$, o produto de α por $\overrightarrow{u}$ é o vetor $\overrightarrow{w}=\alpha\overrightarrow{u}$ tal que:

1. $|\overrightarrow{w}|=|\alpha\overrightarrow{u}|=|\alpha|\cdot|\overrightarrow{u}|$;
2. $\overrightarrow{w}$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{u}$;
3. $\overrightarrow{w}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{u}$ para $\alpha>0$ e sentido contrário para $\alpha<0$.

3.3 Dependência Linear

3.2 Definição. Considere os n vetores $\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\ldots,\overrightarrow{v}_n$ e os n escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Chamamos

$$\overrightarrow{v}=\alpha_1\overrightarrow{v}_1+\alpha_2\overrightarrow{v}_2+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{v}_n$$

de *combinação linear* dos n vetores $\overrightarrow{v}_i$ com n *coeficientes* α_i, $1\leq i\leq n$, $i\in\mathbb{N}$.

Se $\overrightarrow{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\ldots,\overrightarrow{v}_n$ diz-se também que $\overrightarrow{v}$ é *gerado* por $\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\ldots,\overrightarrow{v}_n$.

3.3 Proposição. Dois vetores são paralelos se, e somente se, um deles pode ser escrito como combinação linear do outro.

Prova: Suponha que $\overrightarrow{u}\parallel\overrightarrow{v}$. Portanto, se $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{v},\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Se $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u}=0\overrightarrow{v}$. Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são dois vetores não nulos, basta considerar $\alpha=\frac{|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|}$, que teremos $\overrightarrow{v}=\pm\frac{|\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|}\overrightarrow{u}$, onde o sinal depende do sentido entre os vetores.

Por outro lado, suponha que possamos escrever $\overrightarrow{u}$ como uma combinação linear de $\overrightarrow{v}$, ou seja, $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$. Portanto, $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ por definição. □

3.4 Proposição. Três vetores são coplanares se, e somente se, um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois.

Deixamos com exercício a prova desta Proposição.

3.5 Definição. Se um dos vetores $\overrightarrow{v}_i$ de uma seqüência de vetores $(\overrightarrow{v}_i), i \in N \subset \mathbb{N}$ é escrito como combinação linear de outros termos desta seqüência dizemos que a seqüência é *linearmente dependente* (L.D.). Caso contrário, a seqüência é dita *linearmente independente* (L.I.).

Podemos enunciar a Definição 3.5 da seguinte forma:

3.6 Definição. Uma seqüência de vetores $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$ é *linearmente dependente* se, e somente se, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2 + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}.$$

Das definições, equivalentes, apresentadas podemos concluir que:

1. A seqüencia $(\overrightarrow{v})$ de um termo é linearmente dependente se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
2. A seqüência $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ de dois termos é linearmente dependente se, e somente se, $\overrightarrow{v}_1 \parallel \overrightarrow{v}_2$.
3. A seqüência $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ de três termos é linearmente dependente se, e somente se, os três vetores forem paralelos a um mesmo plano, isto é, se existem α_1, α_2 tais que $\overrightarrow{v}_3 = \alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2$.
4. A seqüência $(\overrightarrow{v}_i), i \in N \subset \mathbb{N}$ de quatro o mais termos é sempre linearmente dependente no $\mathbb{R}^3$.

3.3.1 Propriedades

1. Se o vetor $\overrightarrow{v}$ é LI, ou seja, a seqüencia de um termo, então dado um vetor $\overrightarrow{u}$ paralelo a $\overrightarrow{v}$, temos que existe um único α satisfazendo a $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$ ou existe um único β satisfazendo a $\overrightarrow{v} = \beta\overrightarrow{u}$. Portanto, $\alpha = \frac{1}{\beta}$.
2. Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI e $\overrightarrow{w}$ pertence ao mesmo plano que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, então existem escalares não nulos α e β tais que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.
3. Se três vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ são LI, então para um vetor $\overrightarrow{v}$ qualquer temos que existe um único terno $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tal que $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2 + \alpha_3\overrightarrow{v}_3$.

3.4 Bases - Coordenadas de um Vetor

Um conjunto β de vetores é chamado de base para um determinado espaço V se β é um conjunto linearmente independente e se todos os vetores de V são obtidos de alguma combinação linear de vetores de β. Por exemplo, considere dois vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ LI do plano ($\mathbb{R}^2$) e observe que qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ pode ser obtido através de uma combinação linear destes. Neste caso, o conjunto $\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ constitui uma base do plano. Assim, $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2$ e os escalares α_1 e α_2 são chamados de *coordenadas* do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β e podemos escrever $\overrightarrow{v} = (\alpha_1, \alpha_2)_\beta$.

No espaço ($\mathbb{R}^3$) já são necessários três vetores LI para expressar um vetor qualquer. Portanto, o conjunto $\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ LI forma uma base para o espaço, pois, $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2 + \alpha_3\overrightarrow{v}_3$ representa qualquer vetor do espaço. Os escalares α_1, α_2 e α_3 são as *coordenadas* do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β e podemos escrever $\overrightarrow{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_\beta$.

As mais utilizadas são as bases *ortonormais*, ou seja, os vetores que constituem esta base são ortogonais e unitários. Assim, uma base ortogonal para o plano é $\beta = \{e_1, e_2\}$, onde $|e_1| = |e_2| = 1$ e $e_1 \perp e_2$, e para o espaço $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$ e $e_1 \perp e_2 \perp e_3$. Dentre as infinitas bases ortonormais no plano existe uma importante: a *base canônica*, pois, é ela quem determina o *sistema cartesiano ortogonal* xOy. A base canônica no plano é expressa por $\beta = \{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\}$, onde $\overrightarrow{\imath} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{\jmath} = (0, 1)$. Já no espaço, a base canônica é expressa por $\beta = \{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\kappa}\}$, onde $\overrightarrow{\imath} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{\jmath} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{\kappa} = (0, 0, 1)$.

O conceito de coordenadas de um vetor, relativamente à uma determinada base, nos dá uma maneira algébrica para tratarmos de algumas operações entre vetores e entre vetor e escalar.

3.5 Tratamento Algébrico para Operações com Vetores

3.5.1 Igualdade entre Dois Vetores

3.7 Proposição. Dois vetores são iguais se, e somente se, suas coordenadas o são, ou seja,

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2 \text{ e } u_3 = v_3.$$

A prova desta proposição é deixada para o leitor interessado.

3.5.2 Adição entre Vetores

Dados dois vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definimos a adição da seguinte forma:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Propriedades

Dados três vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ quaisquer, temos:

(a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (b) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (c) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ (d) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$

3.5.3 Produto entre um Escalar e um Vetor

Dados um vetor $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos o produto entre um escalar e um vetor da seguinte forma: $\alpha \cdot \overrightarrow{u} = (\alpha \cdot u_1, \alpha \cdot u_2, \alpha \cdot u_3)$.

Propriedades

Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quaisquer e dois escalares α e β reais, temos:

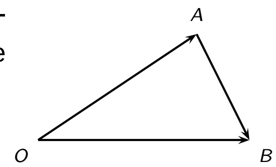
(a) $\alpha(\beta\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{u}$ (b) $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ (c) $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$ (d) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$

Exemplo 3.3. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (5, -3, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (3, -2, 6)$, temos:

$$\begin{aligned}
(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) - 5\overrightarrow{w} &= (2 \cdot (1, -2, 3) + 3 \cdot (5, -3, 2)) - 5 \cdot (3, -2, 6) \\
&= [(2, -4, 6) + (15, -9, 6)] - (15, -10, 30) = (2 + 15, -4 - 9, 6 + 6) - (15, -10, 30) \\
&= (17, -13, 12) - (15, -10, 30) = (2, -23, 42).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{u} + (3\overrightarrow{v} - 5\overrightarrow{w}) &= 2 \cdot (1, -2, 3) + (3 \cdot (5, -3, 2) - 5 \cdot (3, -2, 6)) \\
&= (2, -4, 6) + [(15, -9, 6) - (15, -10, 30)] = (2, -4, 6) + (15 - 15, -9 - 10, 6 + 30) \\
&= (2, -23, 42).
\end{aligned}$$

3.5.4 Vetor Definido por Dois Pontos



Podemos facilmente obter as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{u}$ se possuirmos as coordenadas dos seus pontos extremos. Consideremos o vetor resultante da soma de $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$. Portanto, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Assim,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Portanto, as componentes de um vetor $\overrightarrow{AB}$ são obtidas por $B - A$, isto é $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Exemplo 3.4. Dados os pontos $A(1, -2, 3)$, $B(5, -3, 2)$ e $C(3-, 2, 6)$, podemos obter as coordenadas de um ponto $D(m, n, p)$ tais que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. De fato, esta última igualdade é equivalente a $B - A = 2 \cdot (D - C)$, ou ainda, $(5 - 1, -3 + 2, 2 - 3) = 2 \cdot (m - 3, n + 2, p - 6)$. Da igualdade entre vetores, extrairmos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4 &=& 2m - 6 \\ -1 &=& 2n + 4 \\ -1 &=& 2p - 12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} m &=& 5 \\ n &=& -5/2 \\ p &=& 11/2 \end{array}\right.$$

3.5.5 Ponto Médio

Consideremos o segmento de reta orientado $\overline{AB}$. O ponto médio M de $\overline{AB}$ determina dois vetores equipolentes. Portanto, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Assim, $(x_M - x_A, y_M - y_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M)$ e então $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, ou seja: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

3.5.6 Módulo de um Vetor

O módulo de um vetor $\overrightarrow{v}$ é obtido pela raiz quadrada do somatório dos quadrados de suas coordenadas, isto é, $|\overrightarrow{v}| = |(v_1, v_2, \ldots, v_n)| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_i)^2}$. No plano, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ e no espaço $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

3.5.7 Versor de um Vetor

Ao vetor unitário $\overrightarrow{u}^\circ = \dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$ com o mesmo sentido de um vetor $\overrightarrow{u}$ chamamos de *versor* de $\overrightarrow{u}$.

Exemplo 3.5. Se $|\overrightarrow{u}| = 5$, então $\overrightarrow{u}^\circ = \dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{5}$.

3.6 Exercícios Propostos

EP 3.1. Demonstrar que o segmento de reta cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

EP 3.2. Num triângulo ABC, M, N e P são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Exprima $\overline{BP}$, $\overline{AN}$ e $\overline{CM}$ em função de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

EP 3.3. Dados os pontos $A(4;0;1)$, $B(5;2;3)$, $C(3;3;5)$, $D(2;1;3)$:

(a) Esboce a localização destes pontos num gráfico cartesiano.

(b) Verifique se o polígono $ABCD$ é um quadrado.

(c) Determine as coordenadas do ponto X, intersecção das duas diagonais de $ABCD$.

EP 3.4. Dados os pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m \cdot \overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ e m.

EP 3.5. Seja ABC um triângulo qualquer, com medianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$. Prove que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$.

EP 3.6. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores não-nulos. Seja $C = O + (x \cdot \overrightarrow{u} + y \cdot \overrightarrow{v})$ onde x e y são reais.

(a) Qual é o lugar geométrico dos pontos C quando x e y variam, satisfazendo a condição $x + y = 1$;

(b) Idem, quando x e y variam independentemente no intervalo $[0,1]$.

EP 3.7. São dados um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$, e $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m, n, p).

EP 3.8. Num triângulo ABC é dado X sobre o segmento AB tal que $|\overrightarrow{AX}| = 2|\overrightarrow{XB}|$ e é dado Y sobre BC tal que $|\overrightarrow{BY}| = 3|\overrightarrow{YC}|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam. **Sugestão**: Use o exercício anterior, achando qual deve ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.

EP 3.9. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajudará bastante.)

EP 3.10. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: não é suficiente provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajudará bastante.)

EP 3.11. Sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente, de um triângulo ABC. Mostre que $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

EP 3.12. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

EP 3.13. Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O, prove que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 6\cdot\overrightarrow{AO}$.

EP 3.14. Seja $OABC$ um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

EP 3.15. Seja $OABC$ um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ em termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

EP 3.16. Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O, prove que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 6\cdot\overrightarrow{AO}$.

EP 3.17. Qual é o valor de x para que os vetores $\overrightarrow{u} = (3, -x, -2)$, $\overrightarrow{v} = (3, 2, x)$ e $\overrightarrow{w} = (1, -3, 1)$ sejam coplanares?

EP 3.18. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\overrightarrow{u}$ em função $\overrightarrow{MN}$, sendo $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

EP 3.19. Num hexágono regular $ABCDEF$, M_1, M_2, M_3 e M_4 são os pontos médios dos lados onde se situam. Escreva as expressões dos vetores $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{M_1M_3}$ como combinações lineares de $\overrightarrow{AM_1}$ e $\overrightarrow{AM_4}$.

EP 3.20. Em um triângulo de vértices A, B e C, seja X um ponto sobre o segmento AB tal que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{XB}$. Expresse $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

EP 3.21. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Mostre que: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

EP 3.22. Decida se as informações são verdadeiras ou falsas. Se verdadeiras, demonstre-as. Se falsas, dê um contra-exemplo. (a) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não nulos são paralelos, então existe um real α tal que $\overrightarrow{v} = \alpha\ \overrightarrow{u}$; (b) o vetor $\frac{u}{|u|}$ é unitário.

EP 3.23. Dados O, A, B e C seja G um ponto tal que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Expresse $\overrightarrow{OG}$ em termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

Produtos

3.7 Produto Escalar

3.8 Definição. O produto escalar ($\cdot$) entre dois vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é definido como o somatório dos produtos das suas respectivas coordenadas, isto é:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i.$$

Nota 6.

- ⋄ No plano, dado dois vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ o produto escalar é

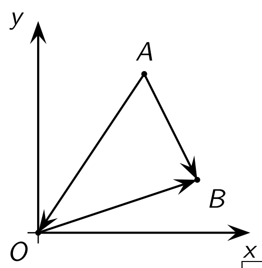
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

- ⋄ No espaço, dado dois vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, o produto escalar é

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3.$$

3.9 Proposição. O produto escalar entre dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é dado também por

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \qquad (3.35)$$



Prova: Considere três pontos não colineares O, A e B, onde O é a origem dos sistema cartesiano ortogonal e os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. O vetor $\overrightarrow{AB}$, resultante da soma entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, e estes dois vetores, formam um triângulo, e pela lei dos cossenos temos que:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \qquad (3.36)$$

Porém,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = x_A^2 + x_B^2 + y_A^2 + y_B^2 - 2(x_A x_B + y_A y_B) \text{ e } |u|^2 + |v|^2 = x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2.$$

Substituindo estes resultados em (3.36) obtemos

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |u|\ |v| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \tag{3.37}$$

Exemplo 3.6. O produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath} - 8\overrightarrow{\kappa}$ e $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} - 4\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{\kappa}$ é:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + (-8) \cdot (-1) = 10 - 12 + 8 = 6.$$

Propriedades

Quaisquer que sejam os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

(a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

(b) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

(c) $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\alpha \overrightarrow{v})$

(d) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0,$ se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$

(e) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

(f) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$

3.7.1 Ângulo entre dois Vetores

Isolando-se o cosseno do ângulo num dos membros na equação (3.37), podemos calcular o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\ |\overrightarrow{v}|}. \tag{3.38}$$

> **Nota 7.** O ângulo entre dois vetores deve estar entre 0 e π. Se o produto escalar entre os vetores for positivo, o ângulo estará entre 0 e $\dfrac{\pi}{2}$. Caso contrário, estará entre $\dfrac{\pi}{2}$ e π.

Exemplo 3.7. O ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -2, 0)$ pode ser obtido recorrendo a fórmula dada em 3.38, de fato:

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{(1, 0, -1) \cdot (1, -2, 0)}{|(1, 0, -1)|\ |(1, -2, 0)|} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,316227.$$

Logo, $(u, v) = \arccos(\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})) = \arccos(0,316227) \approx 71,56°$

Propriedades

Dados os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, as seguintes desigualdades são verificadas

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}|\ |\overrightarrow{v}| \quad \text{(desigualdade de Schwarz)} \tag{3.39}$$

$$|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| \leq |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \quad \text{(desigualdade triangular)} \tag{3.40}$$

3.10 Proposição. Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exemplo 3.8. Prove que o triângulo de vértices em $A(2, 3, 1)$, $B(2, 1, -1)$ e $C(2, 2, -2)$ é retângulo.

3.8 Ângulos Diretores

Considere o vetor $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{\kappa}$ não-nulo. Os ângulos diretores do vetor $\overrightarrow{v}$ são os ângulos α, β e γ os quais $\overrightarrow{v}$ forma com os vetores da base $B = \{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\kappa}\}$. Logo:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\imath}}{|\overrightarrow{v}|\cdot|\overrightarrow{\imath}|} = \frac{x}{|\overrightarrow{v}|} \quad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\jmath}}{|\overrightarrow{v}|\cdot|\overrightarrow{\jmath}|} = \frac{y}{|\overrightarrow{v}|} \quad \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\kappa}}{|\overrightarrow{v}|\cdot|\overrightarrow{\kappa}|} = \frac{z}{|\overrightarrow{v}|}$$

Observe que: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Exemplo 3.9. Dado o vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$, temos que $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, e então:

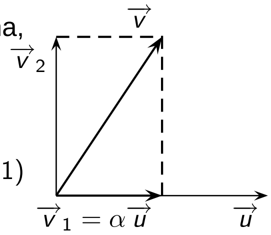
$$\cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\gamma) = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

Logo, os ângulos diretores de $\overrightarrow{v}$ são $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$ e $\gamma = 90°$.

Exemplo 3.10. Os ângulos diretores de um vetor $\overrightarrow{v}$ são $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad e $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad. Como $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, podemos obter γ, da seguinte forma: $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$

3.9 Projeção de um Vetor sobre Outro

Com base na figura temos que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2, \alpha\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}_1 = \text{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 0$. Segue que, $|\overrightarrow{v}_1| \cdot |\overrightarrow{v}_2| = |\overrightarrow{v}_1| \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_1) = \alpha\overrightarrow{u}(\overrightarrow{v} - \alpha\overrightarrow{u}) = 0$. Desta forma, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} - \alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ e, conseqüentemente, $\alpha = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|^2}$. Portanto,



$$\text{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|^2}\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}^{\circ})\cdot\overrightarrow{u}^{\circ} \tag{3.41}$$

3.10 Produto Vetorial

Dados dois vetores $\overrightarrow{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, definimos o produto vetorial $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$ entre estes vetores como sendo o determinante dado por:

$$\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{\kappa} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{\kappa}$$

Exemplo 3.11. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (5, 4, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$, o produto vetorial entre estes vetores, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, é:

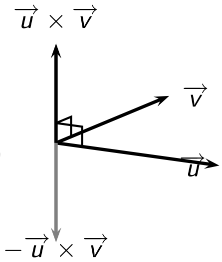
$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{\kappa} \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{\kappa} \\ &= \Big(4\cdot(-1) - 0\cdot(-3)\Big)\cdot\overrightarrow{\imath} - \Big(5\cdot(-1) - 1\cdot(-3)\Big)\cdot\overrightarrow{\jmath} + \Big(5\cdot 0 - 1\cdot 4\Big)\cdot\overrightarrow{\kappa} \\ &= -4\cdot\overrightarrow{\imath} + 2\cdot\overrightarrow{\jmath} - 4\cdot\overrightarrow{\kappa} = (-4, 2, -4) \end{aligned}$$

Nota 8 (Dispositivo prático).

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - x_2y_1).$$

3.10.1 Característica do Produto Vetorial de dois Vetores

O vetor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e o seu sentido depende da orientação do ângulo entre os vetores. A verificação deste resultado é fácil. Considere dois vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ em coordenadas conforme definição acima. Verifique que: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) = 0$.



3.10.2 Comprimento do Vetor Obtido Através do Produto Vetorial

3.11 Proposição. Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos. Então: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \mathrm{sen}(\theta)$.

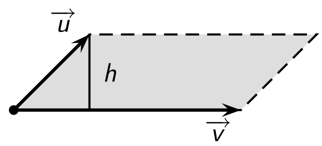
Prova: $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \cos^2(\theta) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1 - \mathrm{sen}^2(\theta)) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \mathrm{sen}^2(\theta)$.

Portanto, $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \mathrm{sen}^2(\theta) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u} \times \vec{v}|^2$. □

3.10.3 Interpretação Geométrica do Produto Vetorial de Dois Vetores

O módulo do produto vetorial entre dois vetores não paralelos é a área do paralelogramo formado na figura, ou seja,

$$A = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \mathrm{sen}(\theta) = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$



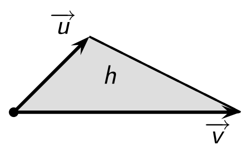
Propriedades

1. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$;
2. $(\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$;
3. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$;
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

3.10.4 Área de um Triângulo

A área de um triângulo formado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como na figura ao lado, é dada por:

$$A_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$



3.11 Produto Misto

Dado três vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, definimos o produto misto como sendo $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Facilmente verificamos que

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3.12. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 5\vec{\kappa}$, $\vec{v} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 3\vec{\kappa}$ e $\vec{w} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{\kappa}$, o produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 15 + 36 - (60 - 18 - 6) = 27.$$

Propriedades

1. A permutação de apenas um vetor muda o sinal do produto misto:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u});$$

2. $(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$
   $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{x}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$;
   $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{x}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{x}, \vec{w})$

3. $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$;

4. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow$ são coplanares.

3.11.1 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto

O volume V do paralelepípedo formado por três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, não coplanares, é dado pelo do módulo do produto misto, ou seja, $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Exemplo 3.13. Considere os vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por estes vetores seja 16 u.v.. Determine a altura relativa à base formada pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: Como o módulo do produto misto nos dá o volume deste paralelepípedo, calculemos inicialmente $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 2 - (4 + 2m + 0) = -8 + 2m.$$

Deste modo, $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |-8+2m| = 16$. Da igualdade modular, temos $-8+2m = 16$ ou $-8+2m = -16$, donde $m = 12$ ou $m = -4$.

Nota 9. O volume do tetraedro V_T formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por

$$V_T = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Exemplo 3.14. Sejam $(1, 2, -1)$, $B(5, 0, 1)$, $C92, -1, 1)$ e $D(6, 1, -3)$ vértices de um tetraedro. Calcular o volume V e a altura h relativa ao vértice D deste tetraedro.

Solução: Primeiramente determinemos os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, que são, respectivamente, $(4, -2, 2)$, $(1, -3, 2)$ e $(5, -1, -2)$. Deste modo, podemos determinar o volume do tetraedro $ABCD$, como descrito na nota 9, temos:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 20 - 2 - (-30 + 4 - 8) = 36.$$

e então, $V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \frac{1}{6} \cdot |36| = 6$. Uma vez que temos o volume do tetraedro e sabendo-se que o volume de um tetraedro pode ser obtido por um terço do produto da área da base com a altura deste. A área da base A_b podemos obter facilmente, do seguinte modo:

$$A_b = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = |(2, -6, -10)| = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{35}.$$

Agora, da fórmula $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, extraímos $h = \frac{3V}{A_b} = \frac{3 \cdot 6}{2\sqrt{35}} = \frac{9\sqrt{35}}{35}$.

3.12 Exercícios Propostos

EP 3.24. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

(a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$;

(b) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.

EP 3.25. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

EP 3.26. Determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

EP 3.27. Determinar um vetor que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b}$ para $\vec{a} = (3, -1, 2)$ e $\vec{b} = (1, 0, -3)$.

EP 3.28. Determinar um vetor unitário que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

EP 3.29. Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$, determine o versor do vetor $\vec{a} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

EP 3.30. Sabendo-se que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ e que o ângulo θ entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $45°$, calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

EP 3.31. Dados os pontos $X(3, m - 1, -4)$ e $Y(8, 2m - 1, m)$, determine m de modo que $|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{35}$.

EP 3.32. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

EP 3.33. Calcular a área do triângulo de vértices $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$.

EP 3.34. Calcular x, sabendo que $A(x, 1, 1)$, $B(1, -1, 0)$ e $C(2, 1, -1)$ são vértices de um triângulo de área $\sqrt{5}$.

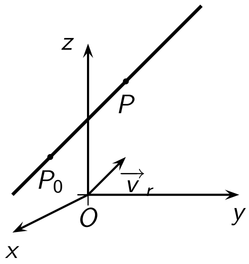
EP 3.35. Verifique se são coplanares os seguintes vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, -1, 0)$ e $\vec{w} = (0, -1, 0)$.

EP 3.36. Calcular o valor de **m** para que seja de 10 unidades o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{v}_2 = 6\vec{\imath} + m\vec{\jmath} - 2\vec{\kappa}$ e $\vec{v}_3 = -4\vec{\jmath} + \vec{\kappa}$.

EP 3.37. Sabendo que a distância entre os pontos $P(-1, 2, 3)$ e $Q(1, -1, m)$ é 7 unidades, calcule m.

Retas

3.13 Equação Vetorial da Reta



Consideremos uma reta r passando pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ com a direção de um vetor $\vec{v}_r = (a, b, c)$ não-nulo. Para que um ponto $P(x, y, z)$ do espaço pertença à reta r, é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{P_0P}$ e $\vec{v}_r$ sejam linearmente dependentes, isto é, $\overrightarrow{P_0P} = h\vec{v}_r$ ou $P - P_0 = h\vec{v}_r$. Segue que $P = P_0 + h\vec{v}_r$, ou seja,

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a, b, c), \quad h \in \mathbb{R}. \qquad (3.42)$$

A equação (3.42) é denominada *equação vetorial da reta* r. O vetor $\vec{v}_r = (a, b, c)$ é chamado *vetor diretor da reta* r e h é denominado *parâmetro*. É fácil verificar que a cada valor de h corresponde um ponto particular P: quando h varia de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto P descreve a reta r.

Exemplo 3.15. Qual a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}_r = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{\kappa}$? Determine um ponto qualquer da reta e verifique se $P(7, 4, -7)$ pertence a r.

Solução: Designando por $P(x, y, z)$ um ponto genérico dessa reta temos que $P = A + h\vec{v}$, isto é: $(x, y, z) = (3, 0, -5) + h(2, 2, -1)$. Quando h varia de $-\infty$ a $+\infty$, P descreve a reta r. Assim, por exemplo, se $h = 1$, um ponto da reta é: $(x_1, y_1, z_1) = (3, 0, -5) + 1(2, 2, -1) = (3, 0, -5) + (2, 2, -1) = (5, 2, -6)$.

A cada ponto $P \in r$ corresponde um número real h. Portanto, para verificarmos se um ponto P é um ponto da reta r devemos substituir as coordenadas de P na equação da reta r e verificarmos se o parâmetro h obtido é único. Sabemos que $r : (x, y, z) = (3, 0, -5) + h(2, 2, -1)$. Logo, é verdadeira a afirmação: $(7, 4, -7) = (3, 0, -5) + h(2, 2, -1)$, para algum número real h, pois, dessa igualdade, temos:

$$h(2, 2, -1) = (7, 4, -7) - (3, 0, -5) \Leftrightarrow (2h, 2h, -h) = (4, 4, -2) \Leftrightarrow h = 2.$$

Observe que, assim como o vetor $\vec{v}_r = (2, 2, -1)$ é um vetor diretor desta reta, qualquer vetor $\alpha\vec{v}_r, \alpha \neq 0$, também o é. Portanto, apenas para exemplificar, se $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$, ainda representam a reta r as equações:

$$\begin{cases} x = 3 + 2h \\ y = 2h \\ z = -5 - h \end{cases}, h \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 3 + 4h \\ y = 4h \\ z = -5 - 2h \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$

3.14 Equações Paramétricas da Reta

Considere um sistema de coordenadas cartesianas, $P(x, y, z)$ e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, da reta r, e $\vec{v}_r = (a, b, c)$ um vetor com a mesma direção de r. Da equação (3.42) temos que $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a, b, c), h \in \mathbb{R}$ ou $(x, y, z) = (x_0 + ah, y_0 + bh, z_0 + ch), h \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\begin{cases} x = x_0 + ah \\ y = y_0 + bh, \quad h \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ch \end{cases} \qquad (3.43)$$

As equações em (3.43), onde $\vec{v}_r \neq \vec{0}$, são denominadas *equações paramétricas* da reta r, em relação ao sistema de coordenadas fixado. A reta r é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) determinados pelas equações paramétricas quando h varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Exemplo 3.16. Quais as equações paramétricas da reta r, que passa pelo ponto $P_0(3, -1, 2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}_r = (-3, -2, 1)$? Obtenha um ponto qualquer desta e verifique se $A(0, 3, 4)$ pertence a esta reta.

Solução: As equações paramétricas da reta r são $x = 3 - 3h$, $y = -1 - 2h$, $z = 2 + h$, $h \in \mathbb{R}$.

Para se obter um ponto desta reta, basta atribuirmos a h um valor particular. Por exemplo, para $h = 3$, tem-se: $x = -6$, $y = -7$ e $z = 5$, isto é, o ponto $(-6, -7, 5)$ é um ponto da reta r. Observe que o ponto $A(3, -1, 2)$ é obtido fazendo $h = 0$. Já o ponto $(0, 3, 4)$ não pertence a esta reta, pois as equações não são satisfeitas para o mesmo valor de h ($h = 1$ satisfaz a primeira equação mas não as outras duas).

3.15 Equações Simétricas da Reta

Se supusermos que $abc \neq 0$ nas equações em (3.43) e isolarmos o parâmetro h, obteremos:

$$h = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \text{ ou seja, } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{3.44}$$

As equações em (3.44) são denominadas *equações simétricas, segmentárias ou normais de uma reta* r que passa por um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v}_r = (a, b, c)$ e poderiam ser obtidas se observarmos o paralelismo existente entre os vetores $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e $\overrightarrow{v}_r = (a, b, c)$, $abc \neq 0$.

Exemplo 3.17. Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{\kappa}$.

Solução: Primeiramente observe que a equação vetorial é $(x, y, z) = (3, 0, -5) + h(2, 2, -1)$, $\forall\ h \in \mathbb{R}$. Da igualdade entre pontos, podemos isolar h, e então escrevermos: $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y}{2} = 5 - z$.

3.16 Equações Reduzidas da Reta

Podemos rearrumar as equações simétricas da reta em (3.44), isolando as variáveis y e z e as expressando em funções de x, temos: $y = \dfrac{b}{a}(x - x_0) + y_0$ e $z = \dfrac{c}{a}(x - x_0) + z_0$. Fazendo $m = \dfrac{b}{a}$, $n = -\dfrac{b}{a}x_0 + y_0$, $p = \dfrac{c}{a}$ e $q = -\dfrac{c}{a}x_0 + z_0$, obtemos:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases} \tag{3.45}$$

Estas são as *equações reduzidas da reta* na variável independente x ou, simplesmente, *equações reduzidas da reta* na variável x.

Nota 10. Nas equações reduzidas em (3.45), a variável x figura como variável independente. Se expressarmos as equações de forma que a variável independente seja y ou z, ainda assim as equações são chamadas equações reduzidas.

Nota 11. Das equações reduzidas em (3.45) obtém-se $x = \frac{y-n}{m} = \frac{z-q}{p}$. Comparando as equações reduzidas com as simétricas:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c},$$

verifica-se que as equações reduzidas representam a reta que passa pelo ponto $N(0, n, q)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (1, m, p)$.

Exemplo 3.18. Estabelecer as equações reduzidas na variável x da reta r que passa pelos pontos $A(2, 1, -3)$ e $B(4, 0, -2)$.

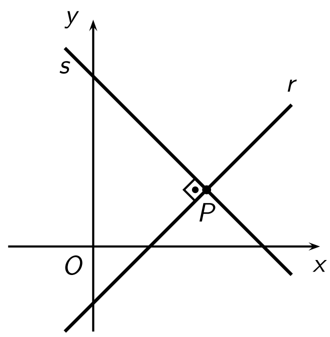
Solução: As equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A(2, 1, -3)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 1)$ são: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = z+3$. Dessas equações obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(y-1) & = & -1(x-2) \\ 2(z+3) & = & (x-2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{-1}{2}x+2 \\ z & = & \frac{1}{2}x-4. \end{array}\right.$$

Exemplo 3.19. As equações $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-3 \\ z & = & -4x+5, \end{array}\right.$ representam a reta que passa pelo ponto $N(0, -3, 5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (1, 2, -4)$.

Observe que o ponto N é obtido fazendo $x = 0$ nas equações reduzidas. Se damos a x outro valor, $x = 1$ por exemplo, teremos o ponto $M(1, -1, 1)$ e um vetor diretor será $\overrightarrow{NM} = (1, 2, -4)$ ou qualquer múltiplo dele.

Nota 12 (Retas Perpendiculares no $\mathbb{R}^2$)**.** No Ensino Médio, sabe-se que duas retas r e s do plano, são ortogonais se, e somente se, o coeficiente angular de uma for o inverso simétrico da outra, ou seja, se m_r é o coeficiente angular da reta r e m_s o da reta s, então $m_r \cdot m_s = -1$. Provaremos esse fato.



Sejam r e s duas retas ortogonais no plano de tal forma que $\vec{v}_r = (a_1, b_1)$ e $\vec{v}_s = (a_2, b_2)$, respectivamente, são os vetores diretores destas retas. Suponha que $A(x_1, y_1) \in r$ e $B(x_2, y_2) \in s$. Deste modo temos as seguintes equações simétricas:

$$r : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} \quad \text{e} \quad s : \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2}$$

e as equações reduzidas são:

$$r : y = \frac{b_1}{a_1}x - \frac{b_1}{a_1}x_1 + y_1 \quad \text{e} \quad s : y = \frac{b_2}{a_2}x - \frac{b_2}{a_2}x_2 + y_2$$

em que $m_r = \frac{b_1}{a_1}$ e $m_s = \frac{b_2}{a_2}$ são, respectivamente, os coeficientes angulares de r e s.

Como as restas são ortogonais, o vetor $\vec{v}_r$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}_s$. Portanto, $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$, donde $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$. Desta última igualdade temos $\frac{a_1}{b_1} = -\frac{b_2}{a_2}$, como queríamos.

3.17 Reta Definida por Dois Pontos

A reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ é a reta que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Exemplo 3.20. A reta r, determinada pelos pontos $A(1,-2,-3)$ e $B(3,1,-4)$, tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,3,-1)$ e as equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= 1+2h \\ y &= -2+3h \\ z &= -4-h \end{cases}$$

representam esta reta r, passando pelo ponto A, com a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Observemos que, embora estes sistemas sejam diferentes, eles permitem encontrar todos os pontos da mesma reta, fazendo h variar de $-\infty$ a $+\infty$. Por exemplo, para $h = 1$, obtemos o ponto $P_1(3,1,-4)$ no primeiro sistema e o ponto $P_2(5,4,-5)$ no segundo sistema e ambos são pontos da mesma reta. é fácil ver que o ponto P_1 pode ser obtido, no segundo sistema, fazendo $h = 0$ e o ponto P_2, no primeiro sistema, fazendo $h = 2$.

Exemplo 3.21. Obter as equações simétricas da reta determinada pelos pontos $A(2,1,-3)$ e $B(4,0,-2)$.

Solução: Um vetor diretor da reta é o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,0,-2) - (2,1,-3) = (2,-1,1)$. Logo, se escolhermos A como sendo o ponto (x_0, y_0, z_0), temos que as equações simétricas da reta são

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = z+3 \ \text{ ou } \ \frac{x-2}{2} = 1 - y = z + 3.$$

Observe que poderíamos escolher o ponto B como sendo o ponto (x_0, y_0, z_0) e, portanto, as equações

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = z+2 \ \text{ ou } \ \frac{x-4}{2} = -y = z+2$$

representam a mesma reta passando pelo ponto B e com a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$.

3.18 Exercícios Propostos

EP 3.38. Determine uma equação da reta r que: (a) Passa pelos pontos $P_1(2,1,2)$ e $P_2(3,-1,1)$; (b) Passa pelo ponto $P(4,1,0)$ e contém representantes do vetor $\vec{u}_r = (2,6,-2)$.

EP 3.39. Verifique se o ponto $P = (-1,0,2)$ pertence à reta: (a) $r : (x,y,z) = (-7,-3,-7) + h(2,1,3)$, $h \in \mathbb{R}$; (b) $s : x = -3 + h$, $y = -1 + h$ e $z = 2h$, $h \in \mathbb{R}$; (c) $h : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-4}{2}$.

EP 3.40. Seja $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2+y}{4} = z$. Determine uma equação de r nas formas vetorial e paramétrica.

3.19 Esboço da Reta no Espaço $\mathbb{R}^3$

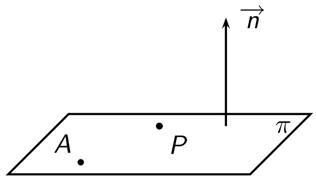
Dada uma das equações da reta, podemos construí-la marcando-se dois dos seus pontos ou um dos pontos e sua direção dada pelo vetor diretor.

Exemplo 3.22. Esboce a reta de equação $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$.

Planos

3.20 Equação Geral do Plano

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ um vetor não nulo normal (ortogonal) ao plano. Definimos o plano π como sendo o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\overrightarrow{n}$. O ponto P pertence a π se, e somente se,



$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$$

Tendo em vista que $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, então a equação fica:

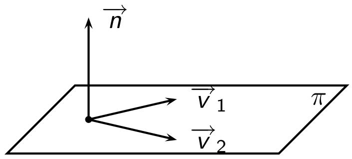
$$\begin{aligned} 0 &= (a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \\ &= a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) \\ &= ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 \end{aligned}$$

Fazendo $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, teremos

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ (*equação geral ou cartesiana do plano* } \pi). \tag{3.46}$$

Da forma com a qual foi definida o plano π, vimos que ele fica perfeitamente identificado através de um ponto A e por um vetor normal $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ a π, com a, b e c não simultaneamente nulos. Qualquer vetor $k\overrightarrow{n}$, $k \neq 0$, é também vetor normal ao plano. Os coeficientes a, b e c da equação geral (3.46) representam as componentes de um vetor normal ao plano e que este mesmo vetor é também normal a qualquer plano α paralelo a π. O elemento que diferencia um plano paralelo de outro é o valor de d.

Nota 13. Sendo $\overrightarrow{n}$ um vetor ortogonal ao plano π, ele será ortogonal a qualquer vetor representado neste plano. Em particular, se $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ estão em π e são linearmente independentes, tem-se: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$.



Exemplo 3.23. Determinar a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$, sendo $\overrightarrow{n} = (3, 2, -4)$ um vetor normal a π.

Solução: Se $\overrightarrow{n}$ é normal ao plano, sua equação é do tipo: $3x + 2y - 4z + d = 0$. Como o ponto A pertence ao plano, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é: $3(2)+2(-1)-4(3)+d = 0 \Rightarrow d = 8$. Logo, a equação geral do plano π é: $3x + 2y - 4z + 8 = 0$.

Uma outra forma de resolver este problema é utilizando a equação: $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$. Substituindo-se $(a, b, c) = (3, 2, -4)$ e $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ e $z_1 = 3$. Logo,

$$3(x - 2) + 2(y + 1) - 4(z - 3) = 0 \;\Rightarrow\; 3x + 2y - 4z + 8 = 0.$$

Exemplo 3.24. Escrever a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A(3, 1, -4)$ e é paralelo ao plano $\pi_1 : 2x - 3y + z - 6 = 0$.

Solução: Vimos acima que o elemento que diferencia um plano paralelo de outro é o valor de d. Deste modo $\pi : 2x - 3y + z + d = 0$. Como $A(3, 1, -4) \in \pi$, temos: $2 \cdot (3) - 3 \cdot (1) + (-4) + d = 0 \Rightarrow d = 1$. Portanto, $\pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$.

Vimos que um plano é determinado por um de seus pontos e por um vetor normal a ele. Assim, sempre que formos determinar a equação de um plano devemos inicialmente nos preocuparmos em determinar se estes dois elementos (ponto e vetor normal) estão evidentes.

Exemplo 3.25. Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1,-3,4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ e $\vec{v} = (1,-1,1)$.

Solução: Um vetor normal ao plano é obtido por: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-5,-4)$. Então, a equação geral do plano é: $-1(x-1)-5(y+3)-4(z-4)=0 \Rightarrow x+5y+4z-2=0$. Nesta equação, um vetor normal ao plano é $(1,5,4)$.

Exemplo 3.26. Qual a equação geral do plano determinado pelos pontos $A(2,1,-1)$, $B(0,-1,1)$ e $C(1,2,1)$?

Solução: Observemos que os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,-1,2)$ não são paralelos e, portanto, um vetor normal do plano é $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6,2,-4)$. Então, a equação geral do plano é $-6(x-2)+2(y-1)-4(z+1)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x-2y+4z-6=0$.

Se multiplicarmos ambos os membros da equação por $\frac{1}{2}$ teremos $3x-y+2z-3=0$. Na determinação da equação deste plano foi utilizado o ponto A. Se fosse usado o ponto B ou o ponto C teríamos obtido a mesma equação.

Exemplo 3.27. Qual a equação geral do plano que contém a reta $r: x=4; y=3$ e o ponto $B(-3,2,1)$?

Solução: A reta r passa pelo ponto $A(4,3,0)$ (a cota deste ponto pode ser qualquer número real, pois a reta r é paralela ao eixo Oz) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (0,0,1)$. Portanto, os vetores-base do plano são $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB} = (-7,-1,1)$ e $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-7,0)$. Então, a equação cartesiana do plano é: $1(x+3)-7(y-2)+0(z-1)=0 \ \Rightarrow \ x-7y+17=0$.

Nota 14. Em todos os problemas de determinação da equação geral do plano um vetor normal foi obtido através do produto vetorial de dois vetores-base desse plano. Vamos mostrar, retomando o problema 3.25, um outro modo de se obter a equação geral. Nesse problema, o plano passa pelo ponto $A(1,-3,4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ e $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$. Ora, se $P(x,y,z)$ é um ponto qualquer do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, são coplanares e, portanto, o produto misto deles é nulo, isto é

$$0 \quad = \quad (\overrightarrow{AP}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -x-5y-4z+2.$$

Logo, a equação geral do plano é $x+5y+4z-2=0$.
O que fizemos para este caso, podemos repetir para todos os demais, pois basta observar que no produto misto dos três vetores dois deles são vetores-base do plano (no caso presente, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$) e o terceiro é obtido com um ponto fixo do plano e o ponto $P(x,y,z)$ genérico.

3.21 Equações Paramétricas do Plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano π e $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores não colineares. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano π que passa por A e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ se, e somente se, existem números reais h e t tais que: $\overrightarrow{AP} = h \cdot \vec{v}_1 + t \cdot \vec{v}_2$.

Escrevendo a equação em coordenadas, obtemos:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2),$$

donde

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases} \tag{3.47}$$

Estas são as *equações paramétricas* do plano. Quando h e t, denominados parâmetros, variam de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto P percorre o plano π.

Exemplo 3.28. As equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $A(2, 1, 3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1 = (-3, -3, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 1, -2)$ são:

$$\begin{cases} x = 2 - 3h + 2t \\ y = 1 - 3h + t \\ z = 3 + h - 2t \end{cases}$$

Se quisermos algum ponto deste plano, basta arbitrar valores para h e t. Por exemplo, para $h = 2$ e $t = 3$, vem:

$$\begin{cases} x = 2 - 3(2) + 2(3) = 2 \\ y = 1 - 3(2) + 1(3) = -2 \\ z = 3 + 1(2) - 2(3) = -1 \end{cases}$$

e, portanto, $A(2, -2, -1)$ é um ponto do plano.

Exemplo 3.29. Escrever as equações paramétrica do plano determinado pelos pontos $A(5, 7, -2)$, $B(8, 2, -3)$ e $C(1, 2, 4)$.

Solução: Sabe-se que três pontos não colineares determinam um plano. Neste caso, faremos

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (3, -5, -1), \vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (-4, -5, 6).$$

Logo, as equações paramétricas (utilizando o ponto A) do plano são:

$$\begin{cases} x = 5 + 3h - 4t \\ y = 7 - 5h - 5t \\ z = -2 - h + 6t \end{cases}$$

3.22 Esboço do Plano no Espaço $\mathbb{R}^3$

Dada a equação geral do plano, podemos construí-lo determinando os pontos de interseção com os eixos coordenados da seguinte forma: Seja $\pi : \ ax + by + cz + d = 0$ um plano tal que a, b e c sejam não nulos, então este plano intersecta os eixos coordenados nos pontos

$$\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right); \quad \left(0, -\frac{d}{b}, 0\right); \quad \left(0, 0, -\frac{d}{c}\right).$$

Exemplo 3.30. Esboce o plano de equação $\pi : \ 2x + 3y + 4z - 12 = 0$.

3.22.1 Planos Paralelos aos Eixos e aos Planos Coordenados

A equação (3.46) na qual a, b e c não são todos nulos, é a equação de um plano π , sendo $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ um vetor normal a π. Quando uma ou duas das componentes de $\overrightarrow{n}$ são nulas, ou quando $d = 0$, está-se em presença de casos particulares.

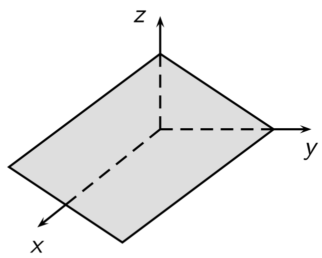
3.22.2 Plano que Passa pela Origem

Se o plano $ax + by + cz + d = 0$ passa pela origem, então $A(0, 0, 0)$ é um ponto do plano. Logo $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0$, isto é, $d = 0$. Assim, a equação $ax + by + cz = 0$ representa a equação de um plano que passa pela origem e $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal ao plano.

3.22.3 Planos Paralelos aos Eixos Coordenados

Se apenas uma das componentes do vetor $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ é nula, o vetor é ortogonal a um dos eixos coordenados, e, portanto, o plano π é paralelo ao mesmo eixo: se $a = 0$, $\overrightarrow{n} = (0, b, c) \perp Ox \therefore \pi // Ox$ e a equação geral dos planos paralelos ao eixo Ox é: $by + cz + d = 0$.

A figura a seguir mostra o plano de equação $2y + 3z - 6 = 0$.



Observemos que suas interseções com os eixos Oy e Oz são $A_1(0, 3, 0)$ e $A_2(0, 0, 2)$, respectivamente, que nenhum ponto da forma $P(x, 0, 0)$ satisfaz a equação. Um vetor normal ao plano é $\overrightarrow{n} = (0, 2, 3)$, pois a equação de π pode ser escrita na forma:

$$0x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

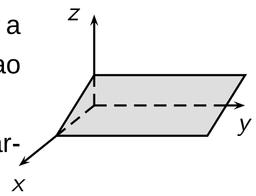
Com raciocínio análogo, vamos concluir que:

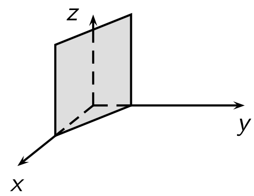
- Os planos paralelos a Oy têm equação da forma $ax + cz + d = 0$;

- Os planos paralelos ao eixo Oz têm equação da forma $ax + by + d = 0$.

Da análise feita sobre este caso particular, conclui-se que a variável ausente na equação indica que o plano é paralelo ao eixo desta variável.

As figuras ao lado mostram, respectivamente, os planos paralelos ao eixo Oy e ao Oz:

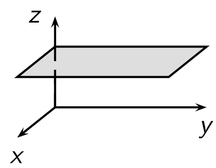




> **Nota 15. Cuidado, Cuidado, Cuidado!**
> A equação $x + 2y - 4 = 0$, como vimos, representa no espaço $\mathbb{R}^3$ um plano paralelo ao eixo Oz. Porém, esta mesma equação, interpretada no plano $\mathbb{R}^2$,representa uma reta.

> **Nota 16.**
> Se na equação $ax + by + d = 0$ fizemos $d = 0$, a equação $ax + by = 0$ representa um plano que passa pela origem e, portanto, contém o eixo Oz.

3.22.4 Planos Paralelos aos Planos Coordenados



Se duas das componentes do vetor normal $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ são nulas, é colinear a um dos vetores $\overrightarrow{\imath}$ ou $\overrightarrow{\jmath}$ ou $\overrightarrow{\kappa}$, e, portanto, o plano π é paralelo ao plano dos outros dois vetores.

— se $a = b = 0$, $\overrightarrow{n} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1) = c\overrightarrow{\kappa} \therefore \pi // xOy$ e a equação geral dos planos paralelos ao plano xOy é $cz + d = 0$. Como $c \neq 0$, vem $z = -\dfrac{d}{c}$.

Os planos cujas equações são da forma $z = k$ são paralelos ao plano xOy. A figura mostra o plano de equação $z = 3$. A equação $z = 3$ pode também ser representada sob a forma $0x + 0y + z - 4 = 0$ na qual vemos que qualquer ponto do tipo $A(x, y, 3)$ satisfaz esta equação e $\overrightarrow{\kappa} = (0, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano. Assim, o plano paralelo ao plano xOy e que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, -3)$ tem por equação $z = -3$.

Com raciocínio análogo, vamos concluir que: os planos paralelos ao plano xOz têm por equação $y = k$; e os planos paralelos ao plano yOz têm por equação $x = k$.

Nota 17. Considere um ponto $A(2, 3, 4)$ e as seguintes equações dos planos $\pi_1 : x = 2$, $\pi_2 : y = 3$ e $\pi_3 : z = 4$. O plano π_1 passa por A e é perpendicular ao eixo Ox (paralelo ao plano yOz). O plano π_2 passa por A e é perpendicular ao eixo Oy (paralelo ao plano xOz) e o plano π_3 passa por A e é perpendicular ao eixo Oz (paralelo ao plano xOy). Os planos coordenados são os planos particulares destes e suas equações são $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

Exemplo 3.31. Qual a equação do plano que contém o ponto $A(2, 2, -1)$ e a reta $r : x = 4; y = 3$.

Solução: A reta r passa pelo ponto $B(4, 3, 0)$ (a cota é arbitrária, pois a reta r é paralela ao eixo Oz) e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1)$. Os vetores-base são $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$. Sendo A (ou B) um ponto fixo desse plano e $P(x, y, z)$ um ponto genérico, deve-se ter

$$0 \quad = \quad (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + 2.$$

Exemplo 3.32. Determinar a equação geral do plano que passa por $A(2, 3, 4)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{\kappa}$ e $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{\kappa}$.

Solução: Sendo $P(x, y, z)$ o ponto genérico deste plano, deve-se ter

$$0 \quad = \quad (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 2.$$

Nota 18. A equação $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, pode representar: um ponto se o universo for a reta $\mathbb{R}$; uma reta se o universo for o plano $\mathbb{R}^2$; um plano se o universo for o espaço $\mathbb{R}^3$.

Posições Relativas

3.23 Colinearidade entre Três Pontos

Três pontos são colineares se eles estão na mesma reta. Portanto, devemos obter, inicialmente, uma equação da reta escolhendo-se de forma aleatória dois pontos quaisquer e, em seguida, verificarmos se o terceiro ponto pertence a esta reta. A seguinte proposição encurta este caminho.

3.12 Proposição. Três pontos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e $A_3(x_3, y_3, z_3)$ são colineares se, e somente se,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

Prova: Para que $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e $A_3(x_3, y_3, z_3)$ estejam em linha reta, os vetores $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$ são paralelos, isto é: $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\, \overrightarrow{A_1A_3}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, $\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$. □

Exemplo 3.33. Verifique se os pontos $A(5, 2, -6)$, $B(-1, -4, -3)$ e $C(7, 4, -7)$ estão em linha reta.

Solução: Utilizando-se a proposição anterior, temos que: $\dfrac{-1-5}{7-5} = \dfrac{-4-2}{4-2} = \dfrac{-3+6}{-7+6} = -3$. Assim, os pontos A, B e C estão em linha reta.

3.24 Condição de Paralelismo entre Duas Retas

A condição de paralelismo das retas r_1 e r_2 é a mesma entre os seus vetores $\overrightarrow{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, que definem as direções dessas retas. Isto é, $\overrightarrow{v}_1 = \alpha \cdot \overrightarrow{v}_2$.

Exemplo 3.34. Verifique se a reta r_1, que passa pelos pontos $A_1(-3, 4, 2)$ e $B_1(5, -2, 4)$, e a reta r_2, que passa pelos pontos $A_2(-1, 2, -3)$ e $B_2(-5, 5, -4)$, são paralelas.

Solução: A direção de r_1 é dada pelo vetor $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} = (8, -6, 2)$ e a direção de r_2 é dada pelo vetor $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{A_2B_2} = (-4, 3, -1)$. Como $\dfrac{8}{-4} = \dfrac{-6}{3} = \dfrac{2}{-1}$, as retas r_1 e r_2 são paralelas.

Nota 19. Seja uma reta r_1, que passa por um ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\overrightarrow{v} = (a_1, b_1, c_1)$, expressa pelas equações:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}.$$

Qualquer reta r_2, paralela à reta r_1, possui parâmetros diretores a_2, b_2, c_2 proporcionais aos parâmetros diretores a_1, b_1, c_1, são parâmetros diretores de qualquer reta paralela à reta r_1. Nestas condições, se $A_2(x_2, y_2, z_2)$ é um ponto qualquer do espaço, as equações da paralela à reta r_1, que passa por A_2, são:

$$\frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{b_1} = \frac{z - z_2}{c_1}.$$

— Se as retas r_1 e r_2 forem expressas, respectivamente, pelas equações reduzidas:

$$r_1 : \begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ z = p_1 x + q_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} y = m_2 x + n_2 \\ z = p_2 x + q_2 \end{cases}$$

cujas direções são dadas, respectivamente, pelos vetores $\overrightarrow{v}_1 = (1, m_1, p_1)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (1, m_2, p_2)$, a condição de paralelismo permite escrever:

$$\frac{1}{1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

3.25 Condição de Ortogonalidade entre Duas Retas

Duas retas r_1 e r_2 são ortogonais se o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ que definem as direções dessas retas é nulo, ou seja, $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 0$

Exemplo 3.35. Verifique se as retas $r_1 : \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases}$ e $r_2 : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4}$ são ortogonais.

Solução: As direções de r_1 e r_2 são dadas pelos vetores $\overrightarrow{v}_1 = (8, 0, -6)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (3, 5, 4)$, respectivamente. As retas são ortogonais, pois, a condição de ortogonalidade entre duas retas é verificada. De fato, $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 8 \cdot 3 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 4 = 0$.

3.26 Paralelismo entre Retas e Planos Coordenados

Vimos que as equações paramétricas em (3.43) ou as equações simétricas em (3.44) representam uma reta r que passa por um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e por um vetor diretor $\overrightarrow{v}_r = (a, b, c)$. Até agora, supusemos que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}_r$ são diferentes de zero. Entretanto, uma ou duas destas componentes podem ser nulas. Então, analisemos cada casos:

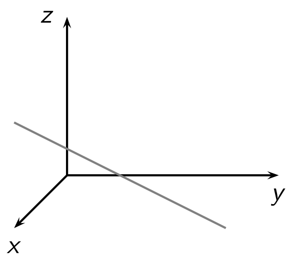
3.26.1 Somente uma das Componentes do Vetor Diretor é Nula

Neste caso, o vetor é ortogonal a um dos eixos coordenados e, portanto, a reta r é paralela ao plano dos outros eixos. Assim:

(a) Se $a = 0$ e $bc \neq 0$, $\overrightarrow{v}_r = (0, b, c) \perp Ox \therefore r \parallel yOz$, as equações de r ficam:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}, \end{cases}$$

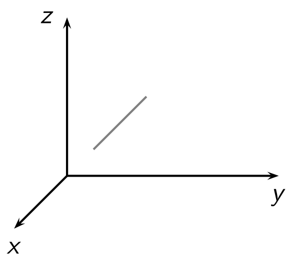
nas quais se verifica que, das coordenadas (x, y, z) de um ponto genérico P da reta r, variam somente y e z, conservando-se $x = x_0$. Isto significa que a reta r está num plano paralelo ao plano coordenado yz.



(b) Se $b = 0$ e $ac \neq 0$, $\overrightarrow{v}_r = (a, 0, c) \perp Oy \therefore r \parallel xOz$, as equações de r ficam:

$$\begin{cases} y = y_1 \\ \dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{z-z_1}{c}. \end{cases}$$

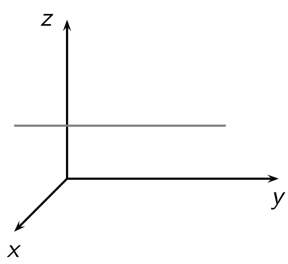
Das coordenadas de um ponto genérico $P(x, y, z)$ da reta r variam somente x e z, conservando-se $y = y_0$. Logo, a reta se encontra num plano paralelo ao plano xOz.



(c) Se $c = 0$ e $ab \neq 0$, $\overrightarrow{v}_r = (a, b, 0) \perp Oz \therefore r \parallel xOy$, as equações de r ficam:

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}. \end{cases}$$

Das coordenadas de um ponto genérico $P(x, y, z)$ da reta r variam somente x e y, conservando-se $z = z_0$. A reta r está num plano paralelo ao plano xOy.

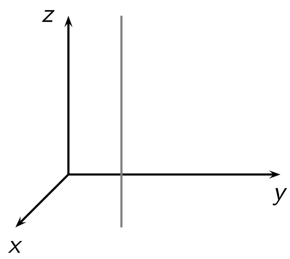


3.26.2 Duas das Componentes do Vetor Diretor São Nulas

Neste caso, o vetor tem a direção de um dos vetores da base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}\}$ e, portanto, a reta r é paralela ao eixo que tem a direção de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ ou $\vec{\kappa}$. Assim:

(a) Se $a = b = 0$ e $c \neq 0$, $\vec{v}_r = (0, 0, c) \parallel \vec{\kappa} \therefore r \parallel z$, as equações de r ficam:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ch. \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$



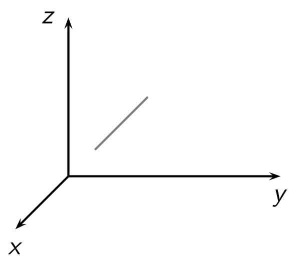
Costuma-se dizer, simplesmente, que as equações da reta r são:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0, \end{cases}$$

subentendendo-se z variável.

(b) Se $a = c = 0$ e $b \neq 0$, $\vec{v}_r = (0, b, 0) \parallel \vec{\jmath} \therefore r \parallel y$ (Figura **??**), as equações de r ficam:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bh \\ z = z_0, \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$



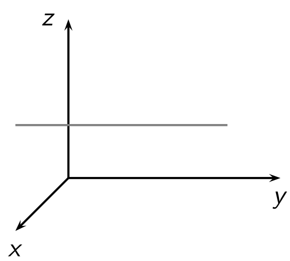
ou simplesmente:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0, \end{cases}$$

subentendendo-se y variável.

(c) Se $b = c = 0$ e $a \neq 0$, $\vec{v} = (a, 0, 0) \parallel \vec{\imath} \therefore r \parallel x$, as equações de r ficam:

$$\begin{cases} x = x_0 + ah \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}, h \in \mathbb{R},$$



ou simplesmente:

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0, \end{cases}$$

subentendendo-se x variável.

Nota 20. Os eixos x, y e z são retas particulares. Assim, o eixo x é uma reta que passa pela origem $O(0, 0, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$. Logo, suas equações são:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

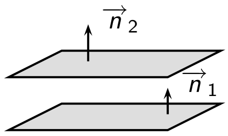
De forma análoga, as equações do eixo Oy e do eixo Oz são, respectivamente:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

3.27 Paralelismo e Perpendicularismo entre Dois Planos

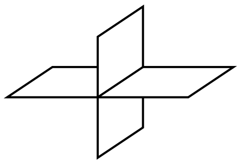
Sejam os planos $\pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e $\pi_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Então, $\overrightarrow{n}_1=(a_1,b_1,c_1)\perp\pi_1$ e $\overrightarrow{n}_2=(a_2,b_2,c_2)\perp\pi_2$. As condições de paralelismo e de perpendicularismo de dois planos são as mesmas de seus respectivos vetores normais, isto é,

(a) $\quad \pi_1 \parallel \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n}_1 \parallel \overrightarrow{n}_2 \quad \therefore \quad \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}.$



Nota 21. Se $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$ os planos são coincidentes.

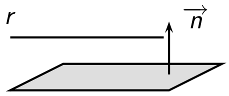
(b) $\quad \pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n}_1 \perp \overrightarrow{n}_2 \quad \therefore \quad a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$



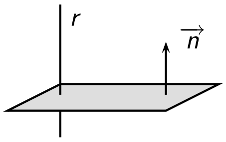
3.28 Paralelismo e Perpendicularismo entre Reta e Plano

Para uma reta r e um plano π, temos:

(a) $\quad r \parallel \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n};$



(b) $\quad r \perp \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{n}.$



3.28.1 Condições para que uma Reta Esteja Contida num Plano

Uma reta r está contida num plano π se o vetor diretor $\overrightarrow{v}$ de r é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{n}$, normal ao plano π, e um ponto A pertencente a r pertence também ao plano.

Nota 22. Uma reta r está também contida num plano π se dois pontos A e B pertencentes a r pertencem a esse plano.

Exemplo 3.36. Determinar o ângulo que a reta $r : X=(1,0,3)+t(-2,-1,1),\ \ \forall\, t\in\mathbb{R}$, forma com o plano $\pi : x+y-5=0$.

Solução: A reta r tem a direção do vetor $\overrightarrow{v}=(-2,-1,1)$ e $\overrightarrow{n}=(1,1,0)$ é um vetor normal ao plano. Deste modo, temos:

$$\operatorname{sen}(\phi)=\frac{|\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v}|\cdot|\overrightarrow{n}|} \;=\; \frac{|(-2,-1,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo $\phi=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ rad.$

Exemplo 3.37. Verificar se $r : \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{-y-1}{2}=-z$ é perpendicular a $\pi : 9x-6y-3z+5=0$.

Solução: Sabe-se que a reta r é perpendicular ao plano π se um vetor $\overrightarrow{v}$ de r é colinear a um vetor $\overrightarrow{n}$, normal ao plano. No caso presente, tem-se $\overrightarrow{v}=(3,-2,-1)$ e $\overrightarrow{n}=(9,-6,-3)$, respectivamente. Como $\overrightarrow{n}=3\overrightarrow{v}$, os vetores são colineares e, portanto, r é perpendicular a π.

Exemplo 3.38. Determinar os valores de m e n para que a reta $r : X = (2,1,-3) + t(1,1,-2)$ esteja contida no plano $\pi : mx + ny + 2z - 1 = 0$.

Solução: A reta r passa pelo ponto $A(2,1,-3)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v} = (1,1,-2)$. Um vetor normal ao plano π é $\overrightarrow{n} = (m,n,2)$. Para que r esteja contida em π é necessário que $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n}$ e $A \in \pi$. Portanto, procuramos m e n que satisfaçam simultaneamente as duas condições:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (1,1,-2)\cdot(m,n,2) & = & 0 \\ m(2)+n(1)+2(-3)-1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} m+n-4 & = & 0 \\ 2m+n-7 & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema obtemos $m = 3$ e $n = 1$, de modo que a reta r esteja contida em π.

Ângulos

3.29 Ângulo entre Duas Retas

Considere as retas r_1, que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\overrightarrow{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e r_2, que passa pelo ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\overrightarrow{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se: $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2|}{|\overrightarrow{v}_1|\cdot|\overrightarrow{v}_2|}, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

ou, em coordenadas $\cos(\theta) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

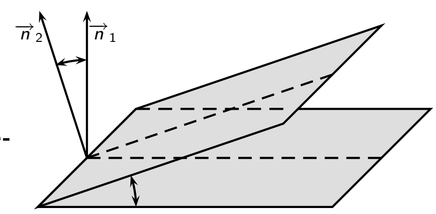
Nota 23. $\theta \in 2^\circ$quadrante $\Rightarrow$ $\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$.

Exemplo 3.39. Calcular o ângulo entre as retas $r_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+h \\ y & = & h \\ z & = & -1-2h \end{array}\right.$, $h \in \mathbb{R}$ e $r_2 : \dfrac{x+2}{-2} = y - 3 = z$

Solução: Os vetores que definem as direções das retas r_1 e r_2 são, respectivamente, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,-2)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (-2,1,1)$. Temos: $\cos(\theta) = \dfrac{|\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2|}{|\overrightarrow{v}_1|\cdot|\overrightarrow{v}_2|} = \dfrac{|(1,1,-2)\cdot(-2,1,1)|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{|-2+1-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$. Portanto, $\theta = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ rad$

3.30 Ângulo entre Dois Planos

Sejam os planos π_1 e π_2 cujos vetores normais são, respectivamente, $\overrightarrow{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n}_2 = (a_2, b_2c_2)$.



$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n};$$

O ângulo entre dois planos será o menor ângulo determinados pelos seus vetores normais. Sendo θ este ângulo, tem-se:

$$\cos(\theta) = \frac{|\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2|}{|\overrightarrow{n}_1|\cdot|\overrightarrow{n}_2|}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.48)$$

Exemplo 3.40. Determinar o ângulo entre os planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z - 8 = 0$ e $\pi_2 : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$

Solução: Os vetores $\overrightarrow{n}_1 = (2, -3, 5)$ e $\overrightarrow{n}_2 = (3, 2, 5)$ são vetores normais a estes respectivos planos, temos:

$$\cos(\theta) = \frac{|\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2|}{|\overrightarrow{n}_1| \cdot |\overrightarrow{n}_2|} = \frac{|(2, -3, 5) \cdot (3, 2, 5)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{|25|}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{38}} = \frac{25}{38}.$$

Logo, $\theta = \operatorname{arccos}\left(\frac{25}{38}\right) \approx 48°51'$.

Exemplo 3.41. Calcular os valores de m e n para que o plano $\pi_1 : (2m-1)x - 2y + nz - 3 = 0$ seja paralelo ao plano $\pi_2 : 4x + 4y - z = 0$.I

Solução: Os vetores $\overrightarrow{n}_1 = (2m-1, -2, n)$ e $\overrightarrow{n}_2 = (4, 4, -1)$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente. De acordo com a condição de paralelismo entre dois planos, deve-se ter:

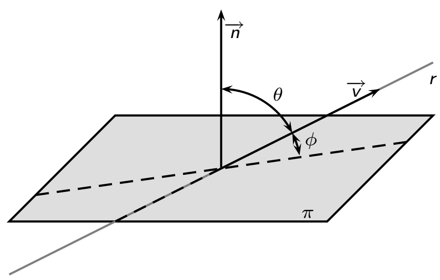
$$\frac{2m-1}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{n}{-1}.$$

Portanto, $m = \frac{-1}{2}$ e $n = \frac{1}{2}$

3.31 Ângulo entre uma Reta e um Plano

Seja uma reta r com a direção do vetor $\overrightarrow{v}$ e um plano π, sendo $\overrightarrow{n}$ um vetor normal a π.

O ângulo ϕ que a reta r forma com o plano π é o complemento do ângulo θ que a reta r forma com uma reta normal ao plano. Tendo em vista que $\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$ e, portanto, $\cos(\theta) = \operatorname{sen}(\phi)$, vem, de acordo com a fórmula:



$$\operatorname{sen}(\phi) = \frac{|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n}|}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \qquad (3.49)$$

3.32 Interseção entre Dois Planos

Consideremos os planos não paralelos $\pi_1 : 5x - 2y + z + 7 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 3y + z + 4 = 0$.

Sabemos que a equação de dois planos não paralelos é uma reta r cujas equações se deseja determinar. Uma reta está determinada quando se conhece dois de seus pontos ou um ponto e um vetor diretor da mesma. Uma ponto pertence à reta interseção se suas coordenadas satisfazem simultaneamente a equações dos dois plano, isto é, ele constitui uma solução do sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 &= 0 \\ 3x - 3y + z + 4 &= 0. \end{cases}$$

O sistema é indeterminado e, em termos de x, sua solução é:

$$\begin{cases} y &= -2x - 3 \\ z &= -9x - 13 \end{cases}$$

Estas são as equações reduzida da reta interseção dos planos π_1 e π_2, sendo os pontos desta interseção da forma:

$$(x, y, z) = (x, -2x - 3, -9x - 13).$$

Se atribuirmos valores a x na solução da sistema, encontraremos os pontos particulares da interseção dos planos π_1 e π_2. Por exemplo, para $x = 0$, temos o ponto $A(0, -3, -13)$ e para $x = 1$, o ponto $B(1, -5, -22)$. Então, um vetor diretor da reta interseção é $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -2, -9)$ e as equações paramétricas dessa reta, utilizado o ponto A, são:

$$r : \begin{cases} x &= t \\ y &= -3 - 2t \\ z &= -13 - 9t \end{cases}$$

Lembrando que uma reta é definida por um ponto e por um vetor diretor, as equações desta interseção podem ser encontradas de outra forma. Determinaremos primeiramente um ponto da reta de abscissa zero, por exemplo. Então, fazendo $x = 0$ nas equações do sistema, resulta o sistema:

$$\begin{cases} -2y + z + 7 &= 0 \\ -3y + z + 4 &= 0 \end{cases}$$

cuja solução é $y = -3$ e $z = -13$. Logo, um ponto da reta interseção é $A(0, -3, -13)$. Como o vetor diretor $\overrightarrow{v}$ desta reta é simultaneamente ortogonal aos vetores $\overrightarrow{n}_1 = (5, -2, 1)$ e $\overrightarrow{n}_2 = (3, -3, 1)$, normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, $\overrightarrow{v}$ será dado pelo produto vetorial de $\overrightarrow{n}_1$ e $\overrightarrow{n}_2$, isto é:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{\kappa} \\ 5 & -21 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -9).$$

Portanto, as equações reduzidas da reta são

$$r : \begin{cases} y &= -2x - 3 \\ z &= -9x - 13 \end{cases}$$

Como a interseção de dois planos não paralelos é sempre uma reta, é muito comum apresentar uma reta através de um sistema cujas equações representam planos. No caso presente, se r é esta reta, temos:

$$r : \begin{cases} 5x - 2y + z + 7 &= 0 \\ 3x - 3y + z + 4 &= 0 \end{cases}$$

3.33 Interseção de Reta com Plano

Consideremos a reta

$$r : \begin{cases} y &= 2x + 3 \\ z &= 3x - 4 \end{cases}$$

Para determinarmos o ponto de interseção $I(x, y, z)$ da reta r com o plano $\pi : 3x + 5y - 2z - 9 = 0$, suas coordenadas devem verificar as equações do sistema formado pelas equações de r e π, isto é

$$\begin{cases} y &= 2x + 3 \\ z &= 3x - 4 \\ 0 &= 3x + 5y - 2z - 9 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se $I(-2, -1, -10)$.

3.33.1 Interseção entre Plano e os Eixos e Planos Coordenados

Seja o plano $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

Interseções com os Eixos Coordenados: Como os pontos dos eixos são da forma $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ e $(0, 0, z)$, basta fazer na equação do plano duas variáveis iguais a zero se encontrar a terceira, e assim obter as interseções com os eixos. Temos:

- ⋄ se $y = z = 0$, $2x - 6 = 0 \therefore x = 3$ e $A_1(3, 0, 0)$ é a interseção do plano π com o eixo dos x;
- ⋄ se $x = z = 0$, $3y - 6 = 0 \therefore y = 2$ e $A_2(0, 2, 0)$ é a interseção do plano π com o eixo dos y;
- ⋄ se $x = y = 0$, $z - 6 = 0 \therefore z = 6$ e $A_3(0, 0, 6)$ é a interseção do plano π com o eixo dos z;

Interseções com os Planos Coordenados: Como as equações dos planos coordenados são $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, basta fazer, na equação do plano, uma variável igual a zero para se encontrar um equação nas outras duas variáveis e, assim, obter as interseções com os planos coordenados. Então:

- ⋄ se $x = 0$, obtemos $3y + z - 6 = 0$, ou seja, a reta $r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = -3y + 6 \end{cases}$ é a interseção de π com o plano yOz;
- ⋄ se $y = 0$, obtemos $2x + z - 6 = 0$, ou seja, a reta $r_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x + 6 \end{cases}$ é a interseção de π com o plano xOz;
- ⋄ se $z = 0$, obtemos $2x + 3y - 6 = 0$, ou seja, a reta $r_3 : \begin{cases} z = 0 \\ y = -\dfrac{2}{3}x + 2 \end{cases}$ é a interseção de π com o plano xOy;

Nota 24. Se um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ não é paralelo a nenhum dos planos coordenados $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e não passa pela origem $d \neq 0$, sua equação pode ser apresentada na forma

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

denominada equação segmentária do plano na qual $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$ e $(0, 0, r)$ são os pontos onde π intercepta os eixos dos x, dos y e dos z, respectivamente.

Exemplo 3.42. Seja a equação $2x + 3y + z - 6 = 0$ ou $2x + 3y + z = 6$. Dividindo ambos os membros por 6, vem:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$

e os pontos de interseção com os eixos dos x, dos y, e dos z são $A_1(3, 0, 0)$, $A_2(0, 2, 0)$ e $A_3(0, 0, 6)$, respectivamente.

Distâncias

3.34 Distância entre Pontos

Dados os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, calculamos a distância entre eles, determinando o $|\overrightarrow{P_1P_2}|$.

Como $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, temos

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (3.50)$$

Exemplo 3.43. Calcule a distância entre os pontos $P_1(1,3,-5)$ e $P_2(0,1,-7)$

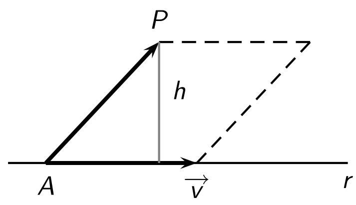
Solução: Conforme 3.50, temos:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(0-1)^2+(1-3)^2+(-7-(-5))^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

3.35 Distância entre Ponto e Reta

Consideremos um ponto P o qual se quer determinar a distância a uma reta r. Tomemos um outro ponto qualquer A pertencente a reta r. Observemos que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e o vetor diretor $\overrightarrow{v}$ da reta r determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância $d(P,r)$ procurada.

Da área de paralelogramo, "*base* $\times$ *altura*", temos:



$$A = |\overrightarrow{v}|\cdot h = |\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{v}| \quad\Leftrightarrow\quad h = \frac{|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$$

Portanto, $d(P,r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$.

Exemplo 3.44. Calcule a distância entre o ponto $P(1,-2,3)$ e a reta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Solução: Um ponto de r é $A(1,-2,3)$ e um vetor diretor de r é $\overrightarrow{v} = (2,3,4)$. Determinando o vetor $\overrightarrow{AP}$, temos $\overrightarrow{AP} = P - A = (2,-4,0)$. Deste modo, a distância entre o ponto P e r, é:

$$d(P,r) = \frac{|(2,-4,0)\times(2,3,4)|}{|(2,3,4)|} = \frac{|(-16,8,14)|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{\sqrt{(-16)^2+18^2+14^2}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{\sqrt{776}}{\sqrt{29}} \approx 5,17$$

3.36 Distância entre Ponto e Plano

Seja $P_0(x_0,y_0,z_0)$ um ponto não pertencente a um plano $\pi : ax+by+cz+d=0$. Para determinarmos a distância $d(P_0,\pi)$, tomemos um ponto $A(x_1,y_1,z_1)$ do plano. Observemos que esta distância nada mais é do que o módulo da projeção de $\overrightarrow{AP_0}$ na direção de um vetor normal $\overrightarrow{n}$ do plano π, ou seja,

$$\begin{aligned} d(P_0,\pi) = \left|\text{proj}_{\overrightarrow{n}}\,\overrightarrow{AP_0}\right| &= \left|\overrightarrow{AP_0}\cdot\frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\right| = \left|(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \\ &= \left|\frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \\ &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0-ax_1-by_1-cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

Como A é um ponto do plano π, satisfaz a condição $ax_1+by_1+cz_1+d=0$. Portanto

$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exemplo 3.45. Calcule a distância entre o ponto $P(1,-2,3)$ e o plano $2x+3y-6z+3=0$.

Solução: Um vetor diretor de π é $\overrightarrow{n} = (2,3,-6)$. Deste modo, temos:

$$d(P_0,\pi) = \frac{|2\cdot 1+3\cdot(-2)+(-6)\cdot 3+3|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}\frac{|2-6-18+3|}{\sqrt{49}} = \frac{|-19|}{7} \approx 2,71.$$

Nota 25.

◇ A fórmula de distância entre ponto e plano também é aplicada a planos paralelos e plano e reta paralelos.

◇ A distância entre plano e reta, não paralelos, é zero. Idem para planos não paralelos.

Exemplo 3.46. Calcule a distância da reta

$$r : \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$$

ao plano $\pi : 4x - 4y + 2z - 7 = 0$.

Solução: A distância entre r e π é zero, pois a reta não é paralela ao plano, de fato. Um vetor diretor de r é $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e um vetor normal de π é $\vec{n} = (4, -4, 2)$, assim

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 4 - 8 + 8 = 4 \neq 0,$$

ou seja, $\vec{v} \not\perp \vec{n}$.

3.37 Distância entre Duas Retas

Aqui, temos três casos a estudar:

◇ Se as retas r_1 e r_2 são concorrentes, nada temos a calcular, a distância é zero.

◇ Se as retas r_1 e r_2 são paralelas, reduzimos o cálculo da distância entre elas, ao caso de distância entre ponto e reta, ou seja,

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_1), P \in r_2 \quad \text{ou} \quad d(r_1, r_2) = d(P, r_2), P \in r_1.$$

◇ Se as retas r_1 e r_2 são reversas, tomemos $A_1 \in r_1$ e $A_2 \in r_2$ e observemos que os vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas r_1 e r_2, respectivamente, e o vetor $\overrightarrow{A_1A_2}$, formam um paralelepípedo cuja altura é a distância $d(r_1, r_2)$ procurada. Como $V = A_b \cdot d = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| \cdot d$ e o mesmo $V = |(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})|$, então

$$d = d(r_1, r_2) = \frac{|(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \tag{3.51}$$

Exemplo 3.47. Calcule a distância entre as retas

$$r : \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ y = -2 - t \end{cases}$$

Solução: Um vetor diretor de r é o vetor $\vec{v}_r = (1, 2, 2)$ e de s é $\vec{v}_s = (2, -2, -1)$. Como não existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_r = \alpha \cdot \vec{v}_s$, temos que $r \not\parallel s$. Verificaremos se r e s são reversas. Sejam $R(0, 3, 1)$ e $S(4, 1, -2)$ pontos de r e s, respectivamente, e considere o vetor $\overrightarrow{RS} = S - R = (4, -2 - 3)$. Temos o seguinte produto misto:

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 8 - 8 - (-16 - 12 + 2) = 16 \neq 0.$$

Deste modo, as retas r e s são coplanares e concorrentes, por não serem paralelas. Logo distância entre elas é zero.

Gabarito

3.1 3.2 $\overline{BP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\overline{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overline{CM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ 3.3 (b) $ABCD$ é um losango ($\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ mas $\left|\overrightarrow{AC}\right| \neq \left|\overrightarrow{BD}\right|$); (c) $X\left(\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, 3\right)$ 3.4 $\overrightarrow{CX} = \frac{m}{1+m} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{1+m} \cdot \overrightarrow{CA}$ 3.5 3.6 (a) uma reta; (b) um paralelogramo. 3.7 $\overrightarrow{CX}$ (vide 3.4); $\overrightarrow{AY} = \frac{1}{n+1} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BZ} = \frac{p}{1+p} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$. 3.8 3.9 3.10 3.11 3.12 3.13 3.14 $\overrightarrow{OX} = (1-m)\overrightarrow{OB} + m \cdot \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB} + m \cdot \overrightarrow{OC}$. 3.15 $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. 3.16 3.17 $x = 14$ ou $x = -2$. 3.18 $\overrightarrow{u} = 4 \cdot \overrightarrow{MN}$. 3.19 Anulada. 3.20 $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ 3.21 3.22 (a) V; (b) V. 3.23 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. 3.24 (a) -1; (b) 1. 3.25 $a = 2$. 3.26 $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{9}{2}$. 3.27 $(9, 33, 3)$. 3.28 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 3.29 $\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$. 3.30 3. 3.31 $m = -1$ ou $m = -3$. 3.32 $3\sqrt{13}\, u.a.$ 3.33 $\sqrt{6}\, u.a.$. 3.34 $x = 2$ ou $x = \frac{6}{5}$. 3.35 Não. 3.36 $m = 0$ ou $m = 10$. 3.37 $m = 9$ ou $m = -3$. 3.38 (a) $(x, y, z) = (2, 1, 2) + h(1, -2, -1)$; (b) $(x, y, z) = (4, 1, 0) + h(2, 6, -2)$ 3.39 (a) $P \in r$; (b) $P \notin r$; (c) $P \notin h$. 3.40 $(x, y, z) = (1, -2, 0) + h(2, 4, 1)$.

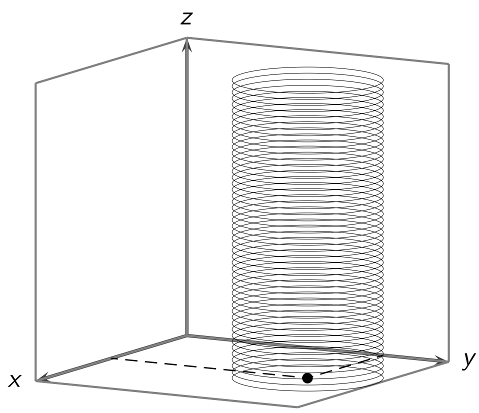
tema 4 Superfícies

4.1 Apresentação

4.1 Definição. O conjunto S de todos os pontos cujas coordenadas retangulares satisfazem a uma equação da forma $f(x, y, z) = 0$ é denominado superfície, ou seja,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}.$$

Por exemplo, a equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ representa um cilindro circular reto (ver figura).



Temos que ser cautelosos com esta definição. Categoricamente, ela afirma que o conjunto dos pontos que descrevem uma superfície satisfaz uma relação do tipo $f(x, y, z) = 0$ e não que toda equação do tipo $f(x, y, z) = 0$ é uma superfície. Uma relação $f(x, y, z) = 0$ pode não representar uma superfície. Por exemplo, a equação $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ não possui ponto que a satisfaça e, portanto, não representa lugar geométrico algum. Já para $x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$ existe um único ponto que a satisfaz, o ponto $(0, 0, 0)$.

4.2 Curvas no Espaço

4.2 Definição. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies de equações $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$, respectivamente. O conjunto C de todos os pontos cujas coordenadas satisfazem, simultaneamente, às duas equações é denominada *curva no espaço*, isto é,

$$C = S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0 \text{ e } g(x, y, z) = 0)\}.$$

Assim, a equação dos pontos satisfazem ao sistema $\begin{cases} f(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{cases}$.

Exemplo 4.1. Uma reta que possui a direção do vetor $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$ e passa pela origem é a curva

$$C_1 : \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}.$$

Exemplo 4.2. Uma circunferência de centro na origem e raio 3 no plano xy é a curva $C_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$.

Exemplo 4.3. Uma parábola de vértice na origem, foco no ponto $F(0, 1, 0)$ e situada no plano yz é a curva $C_3 : \begin{cases} z^2 = 4y \\ x = 0 \end{cases}$.

Exemplo 4.4. Uma hipérbole de centro no ponto $C(3, 2, 0)$, eixo focal paralelo ao Oz, comprimento dos semi-eixos real e imaginário, respectivamente, iguais a $a = 3$ e 2, é a curva $C_4 : \begin{cases} \dfrac{z^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

4.3 Definição. O *traço* de uma superfície é a curva obtida ao interceptarmos-a com um plano.

4.3 Discussão e Esboço de uma Superfície

Da mesma maneira que para curvas planas, para construirmos uma superfície é necessário fazermos antes a discussão de sua equação de acordo com determinado ítens que analisaremos aqui.

Numa discussão do gráfico de uma superfície devemos considerar os seguintes ítens:

1. Interseções com os eixos coordenados;

   Seja $S : f(x, y, z) = 0$ uma superfície. Então: $\begin{cases} S \cap Ox : y = z = 0 \Rightarrow f(x, 0, 0) = 0 \\ S \cap Oy : x = z = 0 \Rightarrow f(0, y, 0) = 0 \\ S \cap Oz : x = y = 0 \Rightarrow f(0, 0, z) = 0 \end{cases}$.

2. Traços sobre os planos coordenados;

   Seja $S : f(x, y, z) = 0$ uma superfície. Então: $\begin{cases} S \cap xy : z = 0 \Rightarrow f(x, y, 0) = 0 \\ S \cap xz : y = 0 \Rightarrow f(x, 0, z) = 0 \\ S \cap yz : x = 0 \Rightarrow f(0, y, z) = 0 \end{cases}$.

3. Simetria em relação à origem, eixos ou planos coordenados;

Um ponto P' é simétrico a P em relação a:	⋄ um ponto Q se a relação $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$ é satisfeita. ⋄ uma reta r se a relação $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$, $Q \in \mathbb{R}$, é satisfeita. ⋄ um plano π se a relação $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$, $Q \in \pi$ é satisfeita.

Dizemos que uma superfície S é simétrica em relação a um ponto, reta ou plano, se cada ponto de S possui um simétrico em S em relação a um ponto, reta ou plano.

4.4 Proposição. Seja $S : f(x, y, z) = 0$ uma superfície. Então, S é simétrica em relação à origem se $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$.

Prova: Seja $Q = (0, 0, 0)$ a origem do sistema $Oxyz$. $P'(a, b, c) \in S$ é simétrico de $P(x, y, z) \in S$ se $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$, ou seja, $(a, b, c) = (0, 0, 0) + (-x, -y, -z) \Rightarrow a = -x$, $b = -y$ e $c = -z$. □

4.5 Proposição. Seja $S : f(x, y, z) = 0$ uma superfície. Então, S é simétrica em relação ao eixo das abscissas se $f(x, y, z) = f(x, -y, -z)$; das ordenadas se $f(x, y, z) = f(-x, y, -z)$ e em relação ao eixo das cotas se $f(x, y, z) = f(-x, -y, z)$.

Prova: Seja $A' = (x, y_2, z_2)$ o simétrico de $A(x, y_1, z_1)$ em relação ao eixo das abscissas Ox. Então, o ponto médio do segmento $\bar{AA'}$ é

$$M(x, 0, 0) = \left(\frac{x+x}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \Leftrightarrow y_1 = -y_2; z_1 = -z_2. \square$$

Os outros casos são provados de forma análoga.

4.6 Proposição. Seja $S : f(x, y, z) = 0$ uma superfície. Então, S é simétrica em relação ao plano xy se $f(x, y, z) = f(x, y, -z)$; ao plano xz se $f(x, y, z) = f(x, -y, z)$ e em relação ao plano yz se $f(x, y, z) = f(-x, y, z)$.

Prova: Seja $A' = (x, y, z_2)$ o simétrico de $A(x, y, z_1)$ em relação ao plano xy. Então, o ponto médio do segmento $\bar{AA'}$ é

$$M(x, y, 0) = \left(\frac{x+x}{2}, \frac{y+y}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \Leftrightarrow z_1 = -z_2. \square$$

Os outros casos são provados de forma análoga.

4. Seções planas paralelas aos planos coordenados;

   Uma boa idéia do aspecto desta superfície é obtida a partir da natureza de suas seções planas. Tais seções podem ser convenientemente determinadas por uma série de planos secantes paralelos a um plano coordenado.

   Por exemplo, planos paralelos ao plano xy pertencem à família cuja equação é $z = k$, onde k é uma constante arbitrária ou parâmetro. Então a partir da equação da superfície temos $f(x, y, z) = 0$, $z = k$, como as equações da curva de interseção para cada valor atribuído a k correspondente a um definido plano secante, e essa curva encontra-se no plano $z = k$ e sua natureza pode ser determinada pelos métodos da geometria analítica plana.

5. Extensão.

   Se a equação de uma superfície é dada na forma $f(x, y, z) = 0$ tentamos resolvê-la para uma das variáveis em função da outra. Uma tal solução para z em função de x e y pode ser escrita na forma explícita $z = F(x, y)$. Essa última equação nos possibilita obter intervalos de valores reais que as variáveis podem assumir. Esta informação é útil na determinação da locação geral da superfície no espaço coordenado; também indica se a superfície é fechada ou de extensão indefinida. Análogo para as variáveis x e y.

4.3.1 Exercícios Propostos

EP 4.1. Considere a superfície $S : x^2 - 2y^2 + xz - 4z + 6 = 0$.

(a) Determine uma equação da superfície simétrica de S em relação ao eixo x.

(b) Verifique se S é simétrica em relação ao plano yz.

(c) Determine e identifique a interseção de S com o plano: $\alpha : x = 2$; $\beta : z = 4$.

EP 4.2. Esboce o gráfico de cada uma das superfícies.

(a) $S : 16x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 144 = 0$

(b) $S : (x-2)^2 - 2y = 0$

(c) $S : 4x^2 - 9(y-2)^2 + 4z^2 = 0$

(d) $S : x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 6z + 13 = 0$

(e) $S : 36x^2 - 16y^2 - 9z^2 - 144 = 0$

(f) $S : 9y^2 - x^2 - 9 = 0$

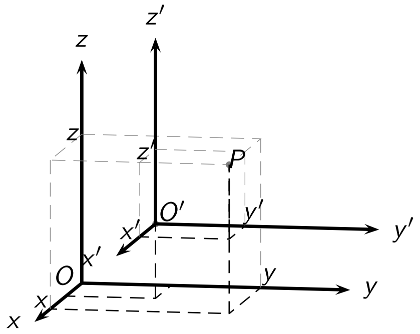
(g) $S : 4y^2 + 9z^2 - 36y = 0$

(h) $S : 4y^2 - 9x^2 - 36z = 0$

(i) $S : 9x^2 - 4y^2 + 36z^2 - 36x - 8y - 72z + 32 = 0$

4.4 Translação de Eixos Coordenados

Consideremos os sistemas coordenados $Oxyz$ e $O'x'y'z'$, onde o segundo é obtido através de uma translação do primeiro, de modo que as coordenadas de O', em relação ao sistema $Oxyz$ é (x_0, y_0, z_0).



Então, as equações de transformação entre os dois sistemas são:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

As equações de translação são muito úteis, principalmente, para o esboço de curvas e de superfícies.

4.5 Quádricas

4.7 Definição. Uma superfície quádrica ou simplesmente quádrica é um conjunto de pontos do espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas satisfazem a equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0, \tag{4.52}$$

de grau dois, no máximo, a três variáveis, em que pelo menos um dos coeficientes do termo de grau dois é diferente de zero, ou seja, a, b, c, d, e ou f é diferente de zero.

Se o termo independente j da equação (4.52) for igual a zero, a quádrica passa pela origem.

Nota 26. A interseção de uma quádrica com os planos coordenados ou planos paralelos a eles, resulta em uma cônica. Por exemplo, o traço obtido pela quádrica (4.52) e pelo plano $z = 0$ é uma cônica contida neste plano (ver equação geral das cônicas) $ax^2 + by^2 + dxy + gx + hy + j = 0$.

Por uma transformação de coordenadas podemos reduzir a equação (4.52) da superfície quádrica em:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D \tag{4.53}$$
$$Ax^2 + By^2 + Cz = 0 \tag{4.54}$$
$$Ax^2 + By + Cz^2 = 0 \tag{4.55}$$
$$Ax + By^2 + Cz^2 = 0 \tag{4.56}$$

As quádricas das em (4.53) são as quádricas com centro, e as dadas em (4.54), (4.55) e (4.56) são as quádricas sem centro.

Constituem as superfícies quádricas mais conhecidas: as Esferas, os parabolóides, as elipsóides, os hiperbolóides, os Cilindros e os Cones. São exemplos de quádricas, também, pares de planos, pontos ou o conjunto vazio. Estes podem ser representados por (4.52).

4.5.1 Quádricas com Centro

A quádrica dada por (4.53) com $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$ pode ter sua equação transformada em:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.57}$$

e é denominada forma canônica da quádrica com centro.

A depender do número de coeficientes positivos e negativos na equação (4.57) temos que:

1. Se os três coeficientes são negativos então não existe lugar geométrico;
2. Se os três coeficientes são positivos então o lugar geométrico é um elipsóide;
3. Se dois coeficientes são positivos e um negativo então o lugar geométrico é um hiperbolóide de uma folha;
4. Se dois coeficientes são negativos e um positivo então o lugar geométrico é um hiperbolóide de duas folhas;

Superfície Esférica

4.8 Definição. Dados um ponto $C \in \mathbb{R}^3$ e um número real r positivo e não nulo, a superfície esférica S de centro em C e raio r é o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam r de C.

Assim, para $P(x, y, z)$ e $C(x_0, y_0, z_0)$, temos que: $P \in S$ se, e somente se, $d(P, C) = r$, ou seja,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \qquad (4.58)$$

a equação reduzida da esfera.

Desenvolvendo-se os quadrados na equação (4.58), temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$$

que podemos escrever: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,\ \ \{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$, a equação geral da esfera.

Observe que as equações gerais de duas esferas concêntricas diferem apenas no termo independente e que os coeficientes na equação (4.58) são todos iguais a 1.

Exemplo 4.5. Determine a equação da superfície esférica cujo um dos diâmetros possui extremidades nos pontos $A(1, -3, 2)$ e $B(3, -1, 2)$.

Solução: O centro da superfície é o ponto médio do segmento AB, ou seja, $C(2, -2, 2)$ e o raio a metade da distância entre os pontos A e B, ou seja, $r = \left|\dfrac{AB}{2}\right| = |(1, 1, 0)| = 2$. Assim, a equação de S é $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 2$.

Exemplo 4.6. Determine a equação da superfície esférica cujo centro pertence à reta $s : x - 2 = 2y = z$ e é tangente aos planos $\pi_1 : -x + 2z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + 2y - 2 = 0$.

Solução: Como o centro da superfície pertence à reta s, podemos escrever $C(z+2, z/2, z)$, para algum $z \in \mathbb{R}$. A medida do raio e as coordenadas do centro são obtidas resolvendo-se as seguintes equações $r = d(C, \pi_1) = d(C, \pi_2)$. O conjunto solução das coordenadas do centro é $\{(7/3, 1/6, 1/3), (1, -1/2, -1)\}$, enquanto que a medida do raio é $\left\{\dfrac{2\sqrt{5}}{15}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$. Logo, as equações das superfícies esféricas são:

$$S_1 : (x - 7/3)^2 + (y - 1/6)^2 + (z - 1/3)^2 = 4/45 \text{ e } S_2 : (x - 1)^2 + (y + 1/2)^2 + (z + 1)^2 = 4/5.$$

Exemplo 4.7. Determine as coordenadas do centro e o raio da superfície esférica de equação: $-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 8x + 12y - 4z + 22 = 0$.

Solução: Dividindo-se a equação por -2 obtemos: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + -6y + 2z = 11$. Completando-se o quadrado, obteremos: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25$. Logo $(2, 3, -1)$ é o centro das superfície esférica e 5 é o comprimento do raio.

Plano Tangente à Superfície Esférica. Seja S uma superfície esférica e π um plano tal que $S \cap \pi = \{T\}$, onde T é um ponto de tangência. Devemos notar que $\overline{CT}$ é normal a π e que $d(C, T) = r = |\overrightarrow{CT}|$.

Plano Secante à Superfície Esférica. Seja $S : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ uma superfície esférica de centro em C e raio r e $\pi : mx + ny + pz + q = 0$ um plano tal que $S \cap \pi = \{\xi\}$, onde ξ é uma circunferência de centro em C' e raio r'. Devemos notar que

1. $\xi : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ mx + ny + pz + q = 0 \end{cases}$
2. a reta s, que passa pelos pontos C e C', é uma reta normal ao plano π;
3. $C' = s \cap \pi$;
4. $r'^2 = r^2 - (d(C, C'))^2$ ou $r'^2 = r^2 - (d(C, \pi))^2$;

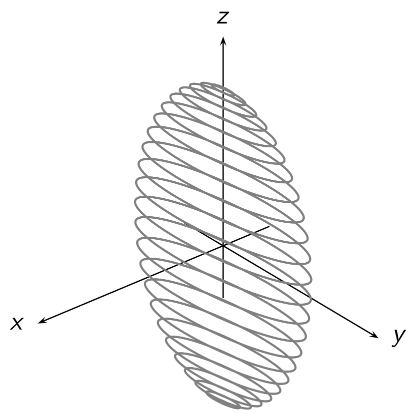
Elipsóide

Uma elipsóide é um conjunto de pontos cujas coordenadas, em algum sistema, satisfaz à equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{4.59}$$

nos quais a, b e c representam números reais positivos e não nulos.

A elipsóide de equação (4.59) é simétrica em relação à origem, aos eixos coordenados x, y e z e aos planos coordenados xy, xz e yz do sistema cartesiano tridimensional. Este fato se deve a que os pontos (x, y, z), $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ satisfazem, respectivamente, esta equação.



As interseções da elipsóide de equação (4.59) com o plano

◇ $z = k$, tal que $|k| < c$, é uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1, z = k.$

◇ $y = k$, tal que $|k| < b$, é uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1, y = k.$

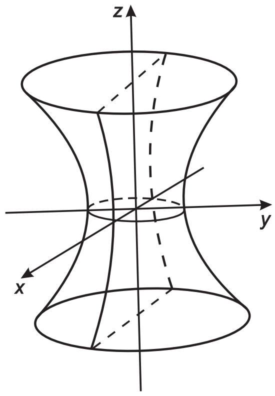
◇ $x = k$, tal que $|k| < a$, é uma elipse de equação $\dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1, x = k.$

Observe que os comprimentos dos eixos da elipse diminuem à medida que os valores de $|k|$ aumentam e que, se $a = b = c$, o elipsóide é uma esfera de raio $r = a$.

Hiperbolóide

Classificamos os hiperbolóides em hiperbolóide de uma folha e de duas folhas.

Hiperbolóide de uma folha



O hiperbolóide de uma folha é um conjunto de pontos que satisfaz a uma das seguintes equações

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4.60}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4.61}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4.62}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que o hiperbolóide de uma folha de equação (4.61) é simétrico em relação aos eixos e aos planos coordenados e à origem (verifique!).

O plano $z=k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha de equação (4.61) segundo a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}=1, z=k.$$

Observe que os eixos da elipse crescem à medida que o valor absoluto $|k|$ aumenta.

O plano $y=k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha de equação (4.61) segundo a elipse de equação

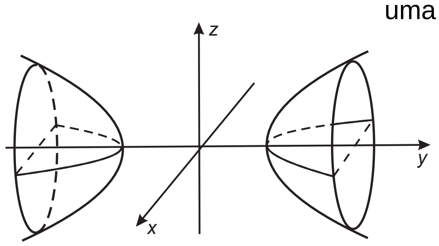
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\left(1+\frac{k^2}{b^2}\right), y=k.$$

Se $\left|\frac{k}{b}\right|\neq 1$, então a interseção é uma hipérbole, caso contrário, é um par de retas concorrentes.

O plano $x=k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha de equação (4.61) segundo a elipse de equação

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right), x=k.$$

Hiperbolóide de Duas Folhas



O hiperbolóide de duas folhas é um conjunto de pontos que satisfaz a uma das seguintes equações

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4.63}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4.64}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4.65}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que o hiperbolóide de duas folhas de equação (4.64) é simétrico em relação aos eixos e aos planos coordenados e à origem (verifique!).

O plano $z=k$, para $|k|>c$, intercepta o hiperbolóide de duas folhas de equação (4.64) segundo a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)}=1, z=k.$$

O plano $y = k$ intercepta o hiperbolóide de duas folhas de equação (4.64) segundo uma hipérbole de equação

$$-\frac{x^2}{a^2\left(\dfrac{k^2}{b^2}+1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2}{b^2}+1\right)}=1, y=k.$$

Se $\left|\dfrac{k}{b}\right| \neq 1$, então a interseção é uma hipérbole, caso contrário, a interseção é um par de retas concorrentes

O plano $x = k$ intercepta o hiperbolóide de duas folhas de equação (4.64) segundo uma elipse de equação

$$-\frac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}+1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}+1\right)}=1, y=k.$$

Exercícios Propostos

EP 4.3. Determinar o centro e o raio das circunferências

$$\xi_1 : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3 &= 0 \\ 6x-5y+2z+3 &= 0 \end{cases} \qquad \xi_2 : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86 &= 0 \\ 2x-2y-z+9 &= 0 \end{cases}$$

EP 4.4. Determine as equações dos planos tangentes à superfície esférica $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1$ que são paralelos ao plano $2x+y-z=0$.

EP 4.5. Seja S uma superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2+3x-7y+4z-3=0$. Verifique a posição relativa dos pontos $O(0,0,0)$, $P(1,5,2)$, $Q(1,1,1)$ e $R(0,2,1)$ em relação a S (interior, exterior ou sobre S).

EP 4.6. Determinar o raio e as coordenadas do centro do círculo que se obtém seccionando a superfície esférica $x^2+y^2+z^2=16$ com um plano $\pi : x+y+z-1=0$.

EP 4.7. Dada a esfera $S : x^2+y^2+z^2-4x-2y-11=0$. Encontre o seu centro e seu raio.

EP 4.8. Verifique se as equações dadas são equações de superfícies esféricas. Caso afirmativo, dê o centro e o raio.

(a) $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

(b) $2x^2+2y^2+2z^2-6x+2y-4z+7=0$

EP 4.9. Determine as equações das superfícies esféricas definidas pelas seguintes condições:

(a) Centro no ponto $C(-4,2,3)$ e é tangente ao plano $\pi : 2x-y-2z+7=0$;

(b) O segmento que une $A(6,2,-5)$ e $B(-4,0,7)$ é o diâmetro;

(c) Centro na interseção de $S : x^2=4(z-1)$ com o eixo Oz e é tangente à reta $r : x=2y=z-2$;

(d) Centro na reta $r : \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 0 \end{cases}$ e é tangente aos planos $\alpha : x-2z-8=0$ e $\beta : 2x-z+5=0$;

(e) Centro na reta $s : \begin{cases} y-2 &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$ e é tangente ao plano $\alpha : x+y-\sqrt{3}z+3=0$ e à reta $r : x = (0,1,-3)+h(0,2,1), h \in \mathbb{R}$.

EP 4.10. Os pontos $A(2;-3;-5)$ e $B(4;1;-3)$ são extremidades de um diâmetro de uma superfície esférica. Encontre sua equação.

4.5.2 Quádricas sem Centro

Já as equações em (4.54), (4.55) e (4.56), com $ABC \neq 0$, podem ser transformadas em

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (4.66)$$
$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by \quad (4.67)$$
$$\pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax \quad (4.68)$$

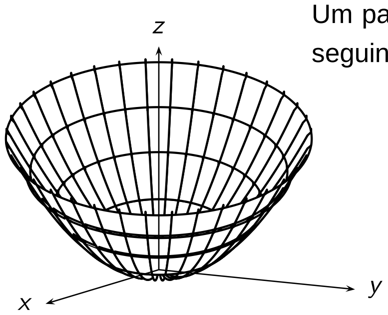
e são denominadas de formas canônicas de quádricas sem centro.

Conforme os termos de 2° grau apresentem coeficientes com o mesmo sinal ou sinais contrários, temos os parabolóides elípticos e os parabolóides hiperbólicos, respectivamente.

Observe que em todas as deduções consideramos os coeficientes das equações em (4.53 - 4.56) não nulos. Quando um ou mais coeficientes nestas equações é zero, a superfície correspondente, caso exista, pode ser cilíndrica, cônica ou uma superfície degenerada (ex: planos, retas, ponto).

Parabolóides

Parabolóide Elíptico



Um parabolóide elíptico é um conjunto de pontos que satisfaz a uma das seguintes equações

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (4.69)$$
$$by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (4.70)$$
$$ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}. \quad (4.71)$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos em (4.70), a e c positivos em (4.71) e b e c positivos em (4.71).

Observe que o parabolóide elíptico de equação (4.70) é simétrico em relação ao eixo z e aos planos xz e yz (verifique!).

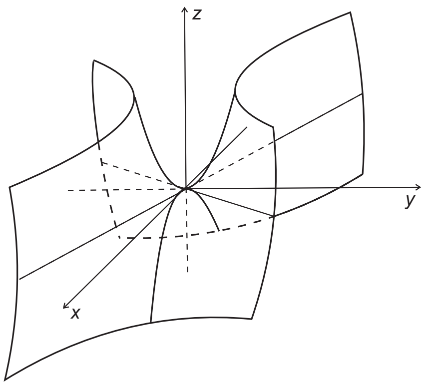
As interseções do parabolóide elíptico de equação (4.70) com o plano:

◇ $z = k$, tal que $ck > 0$, é uma elipse de equação $\frac{x^2}{cka^2} + \frac{y^2}{ckb^2} = 1, z = k$.

◇ $y = k$ é uma parábola de equação $x^2 = a^2c\left(z - \frac{k^2}{cb^2}\right), y = k$.

◇ $x = k$ é uma parábola de equação $y^2 = b^2c\left(z - \frac{k^2}{ca^2}\right), x = k$.

Parabolóide Hiperbólico



Um parabolóide hiperbólico é um conjunto de pontos que satisfaz a uma das seguintes equações

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \qquad (4.72)$$

$$by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}, \qquad (4.73)$$

$$ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}. \qquad (4.74)$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b, a e c e b e c, estritamente positivos em, respectivamente, (4.72), (4.73) e (4.74).

Observe que o parabolóide hiperbólico de equação (4.72) é simétrico em relação ao eixo z e aos planos xz e yz (verifique!).

As interseções do parabolóide hiperbólico de equação (4.72) com o plano:

◇ $z = k$, $k \neq 0$, é uma hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{cka^2} - \dfrac{y^2}{ckb^2} = 1, z = k$. Quando $z = 0$ temos um par de retas cujas equações são $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

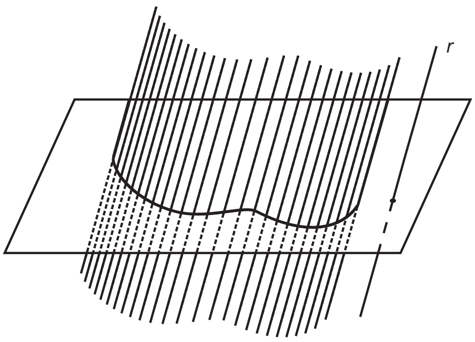
◇ $y = k$ é uma parábola de equação $x^2 = a^2c\left(z + \dfrac{k^2}{cb^2}\right), y = k$.

◇ $x = k$ é uma parábola de equação $y^2 = -b^2c\left(z - \dfrac{k^2}{ca^2}\right), x = k$.

> **Nota 27.** Devido ao formato do seu gráfico, o parabolóide hiperbólico também é conhecido como *sela*.

O estudo das interseções e das simetrias para as equações (4.73) e (4.74) deve ser feito pelo leitor.

4.6 Superfícies Cilíndricas



Uma superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta (geratriz) que se move de maneira que é sempre paralela a uma reta r fixa e passe sempre por uma curva C (diretriz) fixa dada.

Para encontrarmos uma equação de uma superfície cilíndrica devemos estabelecer uma relação entre os pontos arbitrários $P(x, y, z)$ da superfície e $Q(a, b, c)$, projeção de P na diretriz. Esta relação é obtida pelo paralelismo entre os vetores $\overrightarrow{QP}$ e o diretor da reta fixa dada.

Por exemplo, consideremos a geratriz $C : f(x, y) = 0; z = 0$ de uma superfície cilíndrica S, $\overrightarrow{v} = (m, n, p)$ o vetor diretor de uma geratriz de S, $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário de S e $Q(a, b, c) \in C$ a projeção de P sobre a diretriz C. Portanto,

$$\overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{v}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Segue que as equações das geratrizes são: $(x - a, y - b, z - c) = \lambda(m, n, p)$. Assim

$$\begin{cases} a &= x - \lambda m \\ b &= y - \lambda n \\ c &= z - \lambda p \end{cases}.$$

Como $Q \in C$, $f(a,b) = 0; c = 0$. Isto resulta em uma equação da superfície cilíndrica procurada.

Exemplo 4.8. Determine a equação da superfície cilíndrica cuja diretriz é parábola $C : x^2 = 4y; z = 0$ e cuja geratriz tem parâmetros diretores $\overrightarrow{v} = (1, 1, 3)$.

Solução: Tomemos $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário da superfície S e $Q(a, b, c)$ um ponto arbitrário da curva C tal que Q é a projeção de P em C. Logo, $\overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{v}$, ou seja, $(x - a, y - b, z - c) = \lambda(1, 1, 3)$. Desta forma,

$$\begin{cases} a &= x - \lambda \\ b &= y - \lambda \\ c &= z - 3\lambda \end{cases}.$$

Como $Q \in C$,

$$\begin{cases} a^2 &= 4b \\ c &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-\lambda)^2 &= 4(y-\lambda) \\ z - 3\lambda &= 0 \end{cases}$$

Assim, $\lambda = \dfrac{z}{3}$ e $9x^2 + z^2 - 6xz - 36y - 12z = 0$ é uma equação da superfície procurada.

4.9 Proposição. Considere uma superfície cilíndrica.

(a) Se a sua curva diretriz está no plano xy com equação $f(x, y) = 0$ e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, 1)$, então a sua equação é: $f(x - az, y - bz) = 0$.

(b) Se a sua curva diretriz está no plano xz com equação $f(x, z) = 0$ e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, 1, c)$, então a sua equação é: $f(x - ay, z - cy) = 0$.

(c) Se a sua curva diretriz está no plano yz com equação $f(y, z) = 0$ e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, b, c)$, então a sua equação é: $f(y - bx, z - cx) = 0$.

Exemplo 4.9. Mostrar que a superfície de equação $-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$ é uma superfície cilíndrica.

Solução: Fazendo-se $z = 0$, obtemos a curva de equação $-3x^2 + 3y^2 = 27$, candidata a diretriz no plano xy.

Em seguida, substituindo-se x por $x - \alpha z$ e y por $y - \beta z$ nesta última equação obtemos

$$-3(x - \alpha z)^2 + 3(y - \beta z)^2 = -3x^2 + 3y^2 + 6\alpha xz - 6\beta yz + (-3\alpha^2 + 3\beta^2)z^2 = 27.$$

Comparando-se com a equação da superfície obtemos que $\alpha = \dfrac{1}{3}$ e $\beta = \dfrac{-2}{3}$. Conclusão: A superfície é cilíndrica, com retas geratrizes paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{1}{3}; 1; \dfrac{-2}{3}\right)$ e com curva diretriz $-3x^2 + 3y^2 = 27$.

4.10 Teorema. S é uma superfície cilíndrica reta, cuja geratriz é perpendicular ao plano coordenado que contém a diretriz se, e somente se, a sua equação é desprovida da variável não medida no referido plano. Além disso, a equação de S é a equação da sua diretriz.

Prova: Suponha $P(x, y, z)$ sobre a superfície cilíndrica S tendo $C : f(x, y) = 0; z = 0$ por diretriz e de geratrizes paralelas ao eixo das cotas Oz. Então, por construção, a projeção $Q(a, b, c)$ de P na direção do eixo Oz cai sobre C, satisfazendo a $f(x, y) = 0; z = 0$. Portanto, $f(x, y) = 0$.

Reciprocamente, se $P(x, y, z)$ é tal que $f(x, y) = 0$, isso indica que P se projeta paralelamente ao eixo Oz no plano xy em um ponto de C. Logo, por construção de S, $P \in S$. □

Nota 28. Uma superfície cilíndrica é quádrica quando sua equação cartesiana $f(x, y) = 0$ ($f(x, z) = 0$ ou $f(y, z) = 0$) é a mesma equação de uma cônica no plano xy (xz ou yz). O Cilindro pode ainda ser batizado de elíptico, hiperbólico ou Parabólico, conforme a cônica mencionada.

Exercícios Propostos

EP 4.11. Determine, em cada item, uma equação da superfície cilíndrica, de diretriz C, cujas geratrizes são paralelas a reta r. Esboce as superfícies.

(a) $C : \begin{cases} x^2 - 4y^2 - 4 &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$ e $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(0, 0, 1), t \in \mathbb{R}$;

(b) $C : \begin{cases} 9z^2 + 4x^2 &= 36 \\ y &= 0 \end{cases}$ e $r : (x, y, z) = (0, 2, 0) + t(0, 10), t \in \mathbb{R}$;

(c) $C : \begin{cases} y^2 = 4(z - 4) &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$ e $r : x = 1 - y = z - 2$;

(d) $C : \begin{cases} 4x^2 + z^2 + 4z + y^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$ e $r : (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(4, 1, 1), t \in \mathbb{R}$;

(e) $C : \begin{cases} x &= 3 \\ z &= 0 \end{cases}$ e $r : \dfrac{-x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$.

EP 4.12. Dada a superfície cilíndrica S, determine em cada item, uma equação da diretriz e a direção da geratriz. Esboce as superfícies.

(a) $S : (x - 4)^2 + 4(y + 3)^2 - 16 = 0$ (b) $S : y^2 - 4y - 4z - 4 = 0$

EP 4.13. Determine a equação da superfície cilíndrica cuja diretriz é parábola $C : x^2 = 4y; z = 0$ e cujas geratrizes são paralelas ao eixo das cotas.

EP 4.14. Esboce a superfície S de equação $x^2 + z^2 = 4$.

EP 4.15. Considere as superfícies $S_1 : (x^2 + y^2 + 2z^2)^2 = 4(x^2 + y^2)$ e $S_2 : (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 + 4y^2 = 0$.

(a) Mostre que as superfícies são cilíndricas e determine a equação da geratriz.

(b) Esboce as superfícies.

4.7 Superfícies de Revolução

Uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana (*geratriz*) em torno de uma reta fixa dada (*eixo de revolução*) é chamada de *superfície de revolução*. Qualquer posição da geratriz é chamada *seção meridiana* e cada circunferência descrita por um ponto sobre a geratriz é denominada *paralelo* da superfície. Um exemplo já visto no estudo de geografia é o da superfície terrestre que é considerada, aproximadamente, uma superfície esférica, e assim, pode ser obtida ao girarmos um semicírculo em torno do diâmetro.

4.7.1 Equação da Superfície de Revolução

Seja S uma superfície obtida ao girarmos uma curva

$$G : \begin{cases} f(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0 \end{cases} \text{ (geratriz)}$$

em torno da reta $r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), t \in \mathbb{R}$. Se consideramos G como sendo uma curva em um dos planos coordenados e r como sendo um dos eixos coordenados contido no mesmo plano que contém S, teremos 6 casos a analisar:

1 Caso. Sejam $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(y, z) = 0 \text{ e } x = 0\}$ a geratriz da superfície de revolução S_1 contida no plano yz, $P(x, y, z) \in S_1$ um ponto qualquer e Oz o eixo de revolução. O paralelo passando por P intercepta G num ponto $P'(x', y', z')$. É claro que $z = z'$ (I). O centro desse paralelo é $C(0, 0, z)$ e $P'(0, y', z)$. Como P e P' estão numa mesma circunferência temos que $d(P, C) = d(P', C)$, ou seja, $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (y'-0)^2 + (z-z)^2}$. Segue que $y' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ (II).

Como $P' \in G$,

$$\begin{cases} f(y', z') = 0 \\ x' = 0 \end{cases} \quad (III)$$

Usando as equações (I), (II) e (III), obtemos: $S_1 : f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

2 Caso. Sejam $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(y, z) = 0 \text{ e } x = 0\}$ a geratriz da superfície de revolução S_1 contida no plano yz, $P(x, y, z) \in S_1$ um ponto qualquer e Oy o eixo de revolução. Mostra-se, de maneira análoga, ao que foi feito no item anterior que $S_2 : f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

Podemos resumir todos os seis casos na seguinte tabela:

	Planos das geratrizes					
	xy		xz		yz	
G	$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$		$\begin{cases} f(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$		$\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	
ER	Ox	Oy	Ox	Oz	Oy	Oz
$Subst$	$y \downarrow \pm\sqrt{y^2+z^2}$	$x \downarrow \pm\sqrt{x^2+z^2}$	$z \downarrow \pm\sqrt{y^2+z^2}$	$x \downarrow \pm\sqrt{x^2+y^2}$	$z \downarrow \pm\sqrt{x^2+z^2}$	$y \downarrow \pm\sqrt{x^2+y^2}$

Assim, para determinarmos uma equação da superfície de revolução, devemos:

1. Determinar o plano e o tipo da equação da geratriz;
2. Determinar o eixo de revolução;
3. Observar qual a variável que não está sendo utilizada na equação da geratriz;
4. Observar qual variável do eixo que não pode ser o eixo de rotação;
5. Substituir na 1ª equação da geratriz a variável do item 4 por $\pm$ a raiz quadrada da soma dos quadrados da própria e da variável do 3° item.

Exemplo 4.10. Determinar uma equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva $C : \begin{cases} x^2 - 2z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ em torno do eixo-x.

Solução: Plano: xz e eixo de rotação: Ox. Assim: $z \to \pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Logo, $x^2 - 2(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 1$, ou seja, $x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 1$. O traço obtido ao interceptarmos a superfície com o plano xz é a hipérbole $x^2 - 2z^2 = 1$, de centro em $C(0, 0, 0)$, eixo focal sobre o eixo das abscissas, comprimento dos eixos real $(2a)$ e imaginário $2b$ iguais a, respectivamente, 2 e $\sqrt{2}$.

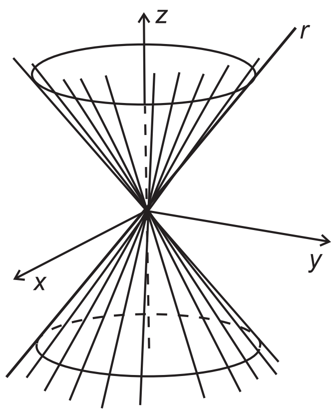
Exemplo 4.11. Determinar uma equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva $C : \begin{cases} x^2 - 2z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ em torno do eixo-z.

Solução: Plano: xz e eixo de rotação: Oz. Assim: $x \to \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Logo, $(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2 - 2z^2 = 1$, ou seja, $x^2+y^2-2z^2 = 1$. O traço obtido ao interceptarmos a superfície com o plano xz é a hipérbole $x^2 - 2z^2 = 1$, de centro em $C(0,0,0)$, eixo focal sobre o eixo das abscissas, comprimento dos eixos real $(2a)$ e imaginário $2b$ iguais a, respectivamente, 2 e $\sqrt{2}$. Ao rotacionarmos em torno do eixo Oz obtemos uma hiperbolóide de uma folha.

Exemplo 4.12. Mostre que a equação $x^2+y^2-2z^2 = 0$ representa uma superfície de revolução; determine seu eixo de revolução e as equações de uma das geratrizes num plano contendo o eixo.

Solução: Mostraremos, inicialmente, que as interseções das superfícies com os planos perpendiculares ao eixo de revolução são circunferências cujos centros se encontram sobre o referido eixo.
Os planos $z = k$ interceptam a superfície em circunferências:

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 2k^2 \\ z &= k \end{cases}$$



de centro em $C(0,0,k)$ e raio $\sqrt{2}k$.
Logo, a equação representa uma superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo Oz.
O eixo Oz se encontra no plano xz ou no plano yz.

$S \cap xz \Rightarrow \begin{cases} x^2-2z^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x &= \pm\sqrt{2}z \\ y &= 0 \end{cases}$
$S \cap yz \Rightarrow \begin{cases} y^2-2z^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} y &= \pm\sqrt{2}z \\ x &= 0 \end{cases}$

4.7.2 Exercícios Propostos

EP 4.16. Em cada um dos seguintes ítens abaixo abaixo, determine uma equação da superfície de revolução, gerada pela rotação da curva C, em torno do eixo especificado. Esboce a superfície.

(a) $C: \begin{cases} x^2-2z^2 &= 1 \\ y &= 0 \end{cases}$ Eixo x

(b) $C: \begin{cases} x^2-2z^2 &= 1 \\ y &= 0 \end{cases}$ Eixo z

(c) $C: \begin{cases} 2x-y &= 10 \\ z &= 0 \end{cases}$ Eixo y

(d) $C: \begin{cases} x+(y+2)^2 &= 5 \\ z &= 2 \end{cases}$ Eixo $s: \begin{cases} y+2 &= 0 \\ z-2 &= 0 \end{cases}$

(e) $C: \begin{cases} 9(x-1)^2+(z+2)^2 &= 9 \\ y-2 &= 0 \end{cases}$ Eixo $s: \begin{cases} y-2 &= 0 \\ x-1 &= 0 \end{cases}$

(f) $C: \begin{cases} x-2 &= 0 \\ y+3 &= 0 \end{cases}$ Eixo $s: \begin{cases} x-4 &= 0 \\ y+3 &= 0 \end{cases}$

EP 4.17. Mostre, em cada um dos ítens abaixo, que a equação dada representa uma superfície de revolução, e determine seu eixo de revolução e as equações de uma das geratrizes num plano contendo o eixo. Esboce a superfície.

(a) $S: x^2+y^2-2z^2 = 0$

(b) $S: 2x^2+2z^2-y-8 = 0$

(c) $S: e^{2x}-y^2-z^2 = 0$

(d) $S: x^2y+z^2y-1 = 0$

(e) $S: (x-1)^2-5(y-3)^2-5(z+2)^2-25 = 0$

(f) $S: 4(x-2)^2+(y-4)^2+4(z+1)^2-16 = 0$

Gabarito

4.1 (a) $x^2 - 2y^2 - xz + 4z + 6 = 0$; (b) Não; (c) Interseção com $\alpha : y^2 = -(z-5)$; parábola de vétice $(2, 0, 5)$; eixo focal paralelo ao eixo z. Interseção com $\beta : \dfrac{(x+2)^2}{14} - \dfrac{y^2}{7} = 1$; hipérbole de centro $(-2, 0, 4)$; eixo focal paralelo ao eixo x. 4.2 4.3 $\xi_1 : C(1, 1, -2)$, $R = 3$; $\xi_2 : C(-1, 2, 3)$, $R = 8$. 4.4 $2x + y - z - 4 \pm \sqrt{6} = 0$. 4.5 (a) O é interior a S; (b) P é exterior a S; (c) Q está sobre S; (d) R é interior a S. 4.6 $r = 4$, $C\left(\dfrac{2}{9}, -\dfrac{1}{9}, -\dfrac{2}{9}\right)$. 4.7 $C(2, 1, 0)$; $r = 4$. 4.8 (a) Sim; $C(1, 1, 0)$; $R = \sqrt{2}$. (b) Não. 4.9 (a) $(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$; (b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$; (c) $9x^2 + 9y^2 + 9(z-1)^2 = 5$; (d) $5(x+2)^2 + 5y^2 + 5(z+11)^2 = 144$ ou $5(x+2)^2 + 5y^2 + 5(z+3)^2 = 16$; (e) $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$ ou $(2x-5)^2 + 4(y-2)^2 + 4z^2 = 45$. 4.10 $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 6$.

[1] BOULOS, Paulo; **Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial**. 3ª edição. São Paulo: Makron Books, 2.005.

[2] WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. 1ª edição. São Paulo: Makron Books, 2.000.

[3] WINTERLE, Paulo. STEIMBRUCH, Alfredo; **Vetores e Geometria Analítica**. 2ª edição. São Paulo: Makron Books, 2.000.

[4] LEHMANN, Charles H.. **Geometria Analítica**. 7ª edição. São Paulo: Globo S.A., 1.991.

FTC – EaD
Faculdade de Tecnologia e Ciêcnias – Educação a Distância
Democratizando a educação.
www.ftc.br/ead

FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

www.ead.ftc.br